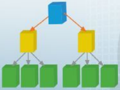
Cánh Diều

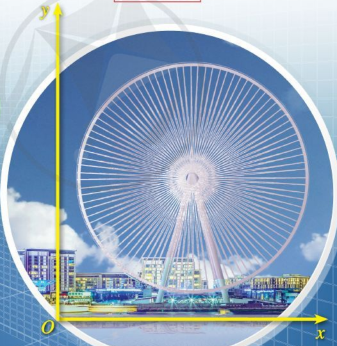
ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG – PHẠM HOÀNG QUÂN

Toán 10

TẬP HAI

BẢN MẪU





NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG – PHẠM HOÀNG QUÂN

Toán 10

TẬP HAI

BẢN MẪU

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

MỤC LỤC

CHƯƠNG V

ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những vấn đề sau: quy tắc cộng, quy tắc nhân, sơ đồ hình cây; hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp; nhị thức Newton; áp dụng vào giải các bài toán đếm.

§1 QUY TẮC CỘNG. QUY TẮC NHÂN. SƠ ĐỒ HÌNH CÂY

(*Nguồn: https://dantri.com*)

Hình 1

Sơ đồ ở *Hình 1* cho biết lịch thi đấu giải bóng đá UEFA Champions League 2020 – 2021 bắt đầu từ vòng tứ kết.

Có bao nhiêu trận đấu của giải bóng đá UEFA Champions League 2020 – 2021 bắt đầu từ vòng tứ kết?

I. QUY TẮC CỘNG

1 Gia đình bạn Liên dự định đi du lịch ở Quy Nhơn (Bình Định). Hướng dẫn viên du lịch đưa ra hai chương trình tham quan như sau:

Chương trình 1 có 4 địa điểm tham quan: khu Safari FLC, khu du lịch Eo Gió, khu du lịch Kỳ Co, Tịnh xá Ngọc Hoà (*Hình 2*).

Chương trình 2 có 7 địa điểm tham quan: biển Quy Nhơn, khu du lịch Ghềnh Ráng Tiên Sa, Tháp đôi, đầm Thị Nại, khu du lịch Cửa Biển, Suft Bar, nhà thờ Làng Sông (*Hình 3*).

(*Nguồn: https://docmiendatnuoc.com*)

Hình 2

(*Nguồn: https://docmiendatnuoc.com*)

Hình 3

Có bao nhiêu cách chọn một địa điểm tham quan trong số các địa điểm được giới thiệu trong hai chương trình ở trên?

Ta có *quy tắc cộng* sau:

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện, hành động thứ hai có n cách thực hiện (các cách thực hiện của cả hai hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có $m + n$ cách hoàn thành.

Ví dụ 1 Bạn Phương có 7 quyển sách Tiếng Anh và 8 quyển sách Văn học, các quyển sách là khác nhau. Hỏi bạn Phương có bao nhiêu cách chọn một quyển sách để đọc?

Giải

Việc chọn một quyển sách để đọc là thực hiện một trong hai hành động sau:

Chọn một quyển sách Tiếng Anh: Có 7 cách chọn.

Chọn một quyển sách Văn học: Có 8 cách chọn.

Vậy có $7 + 8 = 15$ cách chọn một quyển sách để đọc.

1 Một quán bán ba loại đồ uống: trà sữa, nước hoa quả và sinh tố. Có 5 loại trà sữa, 6 loại nước hoa quả và 4 loại sinh tố. Hỏi khách hàng có bao nhiêu cách chọn một loại đồ uống?

Nhận xét: Tương tự, ta cũng có quy tắc sau:

Một công việc được hoàn thành bởi một trong ba hành động. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện, hành động thứ hai có n cách thực hiện, hành động thứ ba có p cách thực hiện (các cách thực hiện của ba hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có $m + n + p$ cách hoàn thành.

II. QUY TẮC NHÂN

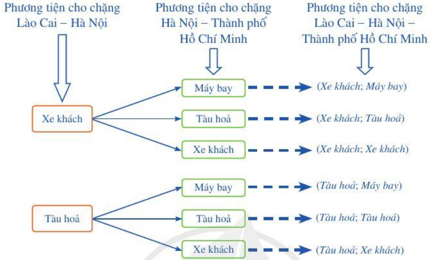
2 Gia đình bạn Thảo dự định đi du lịch từ Lào Cai đến Hà Nội bằng một trong hai phương tiện: xe khách hoặc tàu hoả. Sau đó, từ Hà Nội đi đến Thành phố Hồ Chí Minh bằng một trong ba phương tiện: máy bay, tàu hoả, xe khách (*Hình 4*). Hỏi gia đình bạn Thảo có bao nhiêu cách lựa chọn phương tiện để đi từ Lào Cai đến Thành phố Hồ Chí Minh, qua Hà Nội?

Fansipan (Lào Cai)

Hồ Gươm (Hà Nội)

Bờ sông Sài Gòn (Thành phố Hồ Chí Minh)

(*Nguồn: https://www.shutterstock.com*)



Hình 4

Ta có *quy tắc nhân* sau:

> Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có n cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có $m \cdot n$ cách hoàn thành.

Ví dụ 2 Trong Hoạt động 1, nếu gia đình bạn Liên muốn chọn một địa điểm tham quan trong chương trình 1, sau đó đi tham quan tiếp một địa điểm trong chương trình 2 thì có bao nhiêu cách chọn hai địa điểm ở hai chương trình khác nhau để tham quan?

Giải

Việc chọn hai địa điểm ở hai chương trình khác nhau để tham quan là thực hiện hai hành động liên tiếp: chọn một địa điểm trong chương trình 1, sau đó chọn một địa điểm trong chương trình 2.

Có 4 cách chọn địa điểm tham quan trong chương trình 1.

Với mỗi cách chọn một địa điểm tham quan trong chương trình 1 sẽ có 7 cách chọn địa điểm tham quan trong chương trình 2.

Vậy có tất cả $4 \cdot 7 = 28$ cách chọn hai địa điểm tham quan ở hai chương trình khác nhau.

Nhận xét: Tương tự, ta cũng có quy tắc sau:

Một công việc được hoàn thành bởi ba hành động liên tiếp: Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện; ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có n cách thực hiện hành động thứ hai; ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất và mỗi cách thực hiện hành động thứ hai có p cách thực hiện hành động thứ ba thì công việc đó có $m . n . p$ cách hoàn thành.

Ví dụ 3 Trong kinh doanh nhà hàng, combo là một hình thức gọi món theo thực đơn được kết hợp từ nhiều món ăn hoặc đồ uống. Nếu nhà hàng có 5 món rau, 4 món cá và 3 món thịt thì có bao nhiêu cách tạo ra một combo? Biết mỗi combo có đầy đủ 1 món rau, 1 món cá và 1 món thịt.

Giải

Để tạo một combo ta thực hiện ba hành động liên tiếp: chọn 1 món rau, chọn 1 món cá và chọn 1 món thịt.

Chọn 1 món rau: Có 5 cách chọn.

Chọn 1 món cá: Có 4 cách chọn.

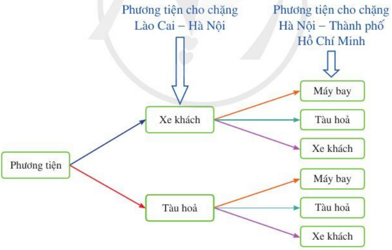
Chọn 1 món thịt: Có 3 cách chọn.

Vậy có $5 . 4 . 3 = 60$ cách tạo ra một combo.

2 Bạn Nam dự định đặt mật khẩu cho khoá vali là một số có ba chữ số được chọn ra từ các chữ số 1, 2, 3, 4. Hỏi bạn Nam có bao nhiêu cách đặt mật khẩu?

III. SƠ ĐỒ HÌNH CÂY

3 Sơ đồ trong *Hình 4* mô tả các cách chọn phương tiện đi từ Lào Cai đến Thành phố Hồ Chí Minh của gia đình bạn Thảo có thể vẽ lại như sau (*Hình 5*):

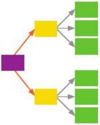


Hình 5

Quan sát sơ đồ hình cây ở *Hình 5*, cho biết có bao nhiêu cách chọn phương tiện đi từ Lào Cai đến Thành phố Hồ Chí Minh.

Nhận xét

- *Sơ đồ hình cây* (*Hình 6*) là sơ đồ bắt đầu tại một nút duy nhất với các nhánh toả ra các nút bổ sung.
- Ta có thể sử dụng sơ đồ hình cây để đếm số cách hoàn thành một công việc khi công việc đó đòi hỏi những hành động liên tiếp.



Hình 6

Ví dụ 4 Bạn Hương có 3 chiếc quần khác màu lần lượt là xám, đen, nâu nhạt và 4 chiếc áo sơ mi cũng khác màu lần lượt là hồng, vàng, xanh, tím. Hãy vẽ sơ đồ hình cây biểu thị số cách chọn:

a) 1 chiếc quần; b) 1 chiếc áo sơ mi; c) 1 bộ quần áo.

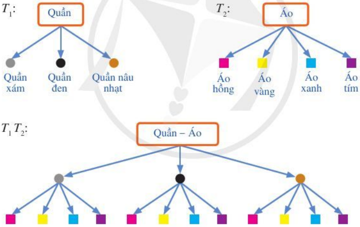
Giải

Các sơ đồ hình cây T_1, T_2, T_1T_2 trong *Hình 7* lần lượt:

a) Biểu thị số cách chọn 1 chiếc quần;

b) Biểu thị số cách chọn 1 chiếc áo sơ mi;

c) Biểu thị số cách chọn 1 bộ quần áo.



Hình 7

IV. VẬN DỤNG TRONG BÀI TOÁN ĐẾM

Việc kiểm đếm có ý nghĩa quan trọng trong toán học và thực tiễn, đặc biệt trong thống kê và xác suất. Kết quả đếm cho phép chúng ta xác định được số các khả năng mà một sự kiện có thể xảy ra để làm cơ sở cho việc đưa ra quyết định. Quy tắc cộng, quy tắc nhân và sơ đồ hình cây là những nguyên tắc cơ bản trong các bài toán đếm.

1. Vận dụng trong giải toán

Ví dụ 5 Cho 10 điểm phân biệt. Hỏi lập được bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$? Biết rằng hai đầu mút của mỗi vectơ là hai trong 10 điểm đã cho.

Giải

Việc lập vectơ là thực hiện hai hành động liên tiếp: chọn điểm đầu và chọn điểm cuối.

Chọn điểm đầu: có 10 cách chọn. Chọn điểm cuối: có 9 cách chọn.

Vậy có $10 \cdot 9 = 90$ (vectơ).

3 Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, lập được bao nhiêu số lẻ gồm ba chữ số đôi một khác nhau?

Ví dụ 6 Phân tích số 10 125 ra thừa số nguyên tố rồi tìm số ước nguyên dương của nó.

Giải

Ta có: $10\,125 = 3^4 \cdot 5^3$. Một ước nguyên dương của 10 125 thì có dạng $3^m \cdot 5^n$, trong đó m, n là hai số tự nhiên sao cho $0 \le m \le 4$, $0 \le n \le 3$.

Như vậy, để tạo ra một ước nguyên dương của 10 125 ta làm như sau:

– Chọn số tự nhiên m mà $0 \le m \le 4$ có 5 cách chọn.

– Chọn số tự nhiên n mà $0 \le n \le 3$ có 4 cách chọn.

– Lấy tích $3^m \cdot 5^n$.

Vì vậy, số ước nguyên dương của 10 125 là: $5 \cdot 4 = 20$ (số).

2. Vận dụng trong thực tiễn

Ví dụ 7 Từ ba mảng dữ liệu A, B, C, máy tính tạo nên một thông tin đưa ra màn hình cho người dùng bằng cách lần lượt lấy một dữ liệu từ A, một dữ liệu từ B và một dữ liệu từ C. Giả sử A, B, C lần lượt chứa m, n, p dữ liệu. Hỏi máy tính có thể tạo ra được bao nhiêu thông tin?

Giải

Việc máy tính tạo ra thông tin là thực hiện ba cách chọn liên tiếp: chọn dữ liệu từ A, chọn dữ liệu từ B và chọn dữ liệu từ C.

Có m cách chọn một dữ liệu từ A.

Có n cách chọn một dữ liệu từ B.

Có p cách chọn một dữ liệu từ C.

Vậy số thông tin máy tính có thể tạo được là: $m \cdot n \cdot p$.

Ví dụ 8 Gia đình bạn Quân đặt mật mã của chiếc khoá cổng là một dãy gồm bốn chữ số. Hỏi có bao nhiêu cách đặt mật mã nếu:

a) Các chữ số có thể giống nhau?

b) Các chữ số phải đôi một khác nhau?

Giải

Gọi dãy số mật mã là *abcd*.

a) Việc chọn mật mã là chọn liên tiếp các chữ số *a*, *b*, *c*, *d*, trong đó các chữ số có thể giống nhau.

Chọn *a*: Có 10 cách chọn. Chọn *b*: Có 10 cách chọn.

Chọn *c*: Có 10 cách chọn. Chọn *d*: Có 10 cách chọn.

Vậy có 10 . 10 . 10 . 10 = 10 000 cách đặt mật mã.

b) Việc chọn mật mã là chọn liên tiếp các chữ số *a*, *b*, *c*, *d*, trong đó các chữ số đôi một khác nhau.

Chọn *a*: Có 10 cách chọn.

Chọn *b*: Có 9 cách chọn (khác chữ số *a* đã chọn).

Chọn *c*: Có 8 cách chọn (khác hai chữ số *a*, *b* đã chọn).

Chọn *d*: Có 7 cách chọn (khác ba chữ số *a*, *b*, *c* đã chọn).

Vậy có 10 . 9 . 8 . 7 = 5 040 cách đặt mật mã.

Ví dụ 9 Cho kiểu gen AaBbDdEE.

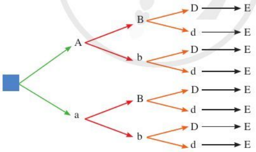
a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị sự hình thành giao tử.

b) Từ đó, tính số loại giao tử của kiểu gen AaBbDdEE.

Biết quá trình giảm phân tạo giao tử bình thường, không xảy ra đột biến.

Giải

a) Sơ đồ hình cây biểu thị sự hình thành giao tử:



b) Từ sơ đồ hình cây, ta có 8 loại giao tử của kiểu gen AaBbDdEE.

BÀI TẬP

1. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, ta lập ra số tự nhiên gồm ba chữ số, chia hết cho 5. Có thể lập được bao nhiêu số như thế?

2. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, lập được bao nhiêu

a) Số chẵn gồm ba chữ số?

b) Số chẵn gồm ba chữ số đôi một khác nhau?

3. Trong một trường trung học phổ thông, khối 10 có 245 học sinh nam và 235 học sinh nữ.

a) Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 10 đi dự buổi giao lưu với học sinh các trường trung học phổ thông trong tỉnh. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

b) Nhà trường cần chọn hai học sinh ở khối 10 trong đó có 1 nam và 1 nữ đi dự trại hè của học sinh trong tỉnh. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

4. Trong giải thi đấu bóng đá World Cup, vòng bảng có 32 đội tham gia, được chia làm 8 bảng, mỗi bảng có 4 đội đấu vòng tròn một lượt. Tính số trận đấu được thi đấu trong vòng bảng theo thể thức trên.

5. Ở Canada, mã bưu chính có 6 kí tự gồm: 3 chữ cái in hoa (trong số 26 chữ cái tiếng Anh) và 3 chữ số. Mỗi mã bưu chính bắt đầu bằng 1 chữ cái và xen kẽ bằng 1 chữ số.

(*Nguồn: https://capath.vn/postal-code-canada*)

a) Có thể tạo được bao nhiêu mã bưu chính?

b) Có thể tạo được bao nhiêu mã bắt đầu bằng chữ S?

c) Có thể tạo được bao nhiêu mã bắt đầu bằng chữ S và kết thúc bằng chữ số 8?

6. Một hãng thời trang đưa ra một mẫu áo sơ mi mới có ba màu: trắng, xanh, đen. Mỗi loại có các cỡ S, M, L, XL, XXL.

a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị các loại áo sơ mi với màu và cỡ áo nói trên.

b) Nếu một cửa hàng muốn mua tất cả các loại áo sơ mi (đủ loại màu và đủ loại cỡ áo) và mỗi loại một chiếc để về giới thiệu thì cần mua tất cả bao nhiêu chiếc áo sơ mi?

7. Một khách sạn nhỏ chuẩn bị bữa ăn sáng gồm 2 đồ uống là: trà và cà phê; 3 món ăn là: phở, bún và cháo; 2 món tráng miệng là: bánh ngọt và sữa chua.

a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị các cách chọn khẩu phần ăn gồm đủ ba loại: đồ uống, món ăn và món tráng miệng.

b) Tính số cách chọn khẩu phần ăn gồm: 1 đồ uống, 1 món ăn và 1 món tráng miệng.

8. Cho kiểu gen AaBbDdEe. Giả sử quá trình giảm phân tạo giao tử bình thường, không xảy ra đột biến.

a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị sự hình thành giao tử.

b) Từ đó, tính số loại giao tử của kiểu gen AaBbDdEe.

§2 HOÁN VỊ. CHỈNH HỢP


(Nguồn: https://baokhanhhoa.vn)

Trong vòng đấu loại trực tiếp của giải bóng đá, nếu sau khi kết thúc 90 phút thi đấu và hai hiệp phụ mà kết quả vẫn hoà thì loạt đá luân lưu 11 m sẽ được thực hiện. Trước hết, mỗi đội cử ra 5 cầu thủ thực hiện loạt đá luân lưu.

Trong toán học, mỗi cách xếp thứ tự đá luân lưu của 5 cầu thủ được gọi là gì?

I. HOÁN VỊ

1. Định nghĩa

1 Huấn luyện viên chọn 5 cầu thủ An, Bình, Cường, Dũng, Hải đá luân lưu 11 m. Nêu ba cách xếp thứ tự đá luân lưu 11 m của 5 cầu thủ trên.

> Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \in \mathbb{N}^*$).
> Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một *hoán vị của n phần tử* đó.

Ví dụ 1 Hãy liệt kê tất cả các số gồm ba chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3.

Giải

Các số gồm ba chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3 là:

123, 132, 213, 231, 312, 321.

2. Số các hoán vị

2 Một lớp được chia thành 3 nhóm A, B, C để tham gia hoạt động thực hành trải nghiệm. Sau khi các nhóm thực hiện xong hoạt động, giáo viên sắp xếp thứ tự trình bày của 3 nhóm.

a) Có bao nhiêu cách chọn nhóm trình bày thứ nhất?

b) Sau khi đã chọn nhóm trình bày thứ nhất, có bao nhiêu cách chọn nhóm trình bày thứ hai?

c) Sau khi đã chọn hai nhóm trình bày thứ nhất và thứ hai, có bao nhiêu cách chọn nhóm trình bày thứ ba?

d) Với cách làm như trên, giáo viên tạo ra một hoán vị của 3 phần tử. Tính số các hoán vị được tạo ra.

Theo quy tắc nhân, số các hoán vị của 3 phần tử là: 3 . 2 . 1 = 6.

Trong trường hợp tổng quát, đối với tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$), ta làm tương tự như trên để tạo ra một hoán vị của n phần tử đó và số các hoán vị của n phần tử trong tập hợp A là $n(n-1) \ldots 2 . 1$.

Kí hiệu P_n là số các hoán vị của n phần tử. Ta có: $P_n = n(n-1) \ldots 2 . 1$.

Quy ước: Tích $1 . 2 \ldots n$ được viết là $n!$ (đọc là n giai thừa), tức là $n! = 1 . 2 \ldots n$.

Như vậy $P_n = n!$.

Ví dụ 2 Tính số cách xếp thứ tự đá luân lưu 11 m của 5 cầu thủ.

Giải

Mỗi cách xếp thứ tự đá luân lưu 11 m của 5 cầu thủ là một hoán vị của 5 cầu thủ.

Vậy số cách sắp xếp là: $P_5 = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$.

1 Có bao nhiêu số gồm sáu chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6?

II. CHỈNH HỢP

1. Định nghĩa

3 Cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng. Liệt kê các vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối là 2 trong 3 điểm trên.

Để tạo ra một vectơ như trên, ta phải chọn ra 2 trong 3 điểm A, B, C và xác định thứ tự 2 điểm đó.

Trong thực tiễn, bên cạnh việc chọn ra một số đối tượng từ những đối tượng cho trước, ta còn cần sắp xếp thứ tự của những đối tượng được chọn ra.

4 Một lớp có 4 nhóm học tập được đặt tên là A, B, C, D. Giáo viên thực hiện hành động sau: chọn 2 nhóm trong 4 nhóm, sau đó sắp xếp thứ tự trình bày của 2 nhóm đã được chọn ra. Nêu 4 kết quả thực hiện hành động của giáo viên.

Ta gọi mỗi kết quả thực hiện hành động như thế là một chỉnh hợp chập 2 của 4 phần tử đã cho.

Cho tập hợp A gồm n phần tử và một số nguyên k với $1 \leq k \leq n$.

Kết quả của việc lấy k phần tử từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một *chỉnh hợp chập k của n phần tử* đã cho.

Ví dụ 3 Hãy liệt kê tất cả các số gồm hai chữ số khác nhau được lấy từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5.

Giải

Các số gồm hai chữ số khác nhau được lấy từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 là:

12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54.

2. Số các chỉnh hợp

5 Một lớp được chia thành 5 nhóm A, B, C, D, E để tham gia hoạt động thực hành trải nghiệm. Sau khi các nhóm thực hiện xong hoạt động, giáo viên chọn 3 nhóm trong 5 nhóm và sắp xếp thứ tự trình bày kết quả hoạt động của 3 nhóm đã được chọn ra.

a) Có bao nhiêu cách chọn nhóm trình bày thứ nhất?

b) Sau khi đã chọn nhóm trình bày thứ nhất, có bao nhiêu cách chọn nhóm trình bày thứ hai?

c) Sau khi đã chọn nhóm trình bày thứ nhất và thứ hai, có bao nhiêu cách chọn nhóm trình bày thứ ba?

d) Với cách làm như trên, giáo viên tạo ra một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử. Tính số các chỉnh hợp được tạo ra.

Theo quy tắc nhân, số các chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử là:
$5 . 4 . 3 = 60$.

Trong trường hợp tổng quát, đối với tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$), ta làm tương tự như trên để tạo ra một chỉnh hợp chập k của n phần tử đó ($1 \leq k \leq n$) và số các chỉnh hợp chập k của n phần tử trong tập hợp A là:

$$n(n-1)...(n-k+1).$$

Kí hiệu A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử ($1 \leq k \leq n$).

Ta có: $A_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$.

Ví dụ 4 Ở các căn hộ chung cư, người ta thường dùng các chữ số để tạo mật mã mở cửa. Gia đình bạn Linh đặt mật mã nhà là một dãy số gồm 6 chữ số đôi một khác nhau. Hỏi gia đình bạn Linh có bao nhiêu cách để tạo mật mã?

Giải

Mỗi mật mã của gia đình bạn Linh là một chỉnh hợp chập 6 của 10 chữ số.

Vậy có $A_{10}^6 = 10 . 9 . 8 . 7 . 6 . 5 = 151\,200$ (cách để tạo mật mã).

6 Ta có thể tính số các hoán vị và số các chỉnh hợp bằng máy tính cầm tay như sau:

Nút giai thừa: $\boxed{x!}$; nút chỉnh hợp $\boxed{nPr}$.

Tính	Nút ấn	Kết quả
5!	5 SHIFT $x!$ =	120
A_{10}^{6}	10 SHIFT nPr 6 =	151 200

Ví dụ 5 Dùng máy tính cầm tay để tính: 12!; A_{12}^{6}.

Giải

Tính	Nút ấn	Kết quả
12!	12 SHIFT $x!$ =	479 001 600
A_{12}^{6}	12 SHIFT nPr 6 =	665 280

2 Trong vòng đấu loại trực tiếp của một giải bóng đá, nếu sau khi kết thúc 90 phút thi đấu và cả hai hiệp phụ của trận đấu mà kết quả vẫn hoà thì loạt đá luân lưu 11 m sẽ được thực hiện. Tính số cách xếp thứ tự 5 cầu thủ đá luân lưu của đội bóng có 11 cầu thủ.

BÀI TẬP

1. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ta lập được bao nhiêu số tự nhiên
   a) Gồm 8 chữ số đôi một khác nhau? b) Gồm 6 chữ số đôi một khác nhau?

2. Trong chương trình ngoại khoá giáo dục truyền thống, 60 học sinh được trường tổ chức cho đi xem phim. Các ghế ở rạp được sắp thành các hàng. Mỗi hàng có 20 ghế.
   a) Có bao nhiêu cách sắp xếp 20 bạn để ngồi vào hàng đầu tiên?
   b) Sau khi sắp xếp xong hàng đầu tiên, có bao nhiêu cách sắp xếp 20 bạn để ngồi vào hàng thứ hai?
   c) Sau khi sắp xếp xong hai hàng đầu, có bao nhiêu cách sắp xếp 20 bạn để ngồi vào hàng thứ ba?

3. Bạn Việt chọn mật khẩu cho email của mình gồm 8 kí tự đôi một khác nhau, trong đó có 3 kí tự đầu tiên là 3 chữ cái trong bảng gồm 26 chữ cái in thường và 5 kí tự tiếp theo là chữ số. Bạn Việt có bao nhiêu cách tạo ra mật khẩu?

4. Mỗi máy tính tham gia vào mạng phải có một địa chỉ duy nhất, gọi là địa chỉ IP, nhằm định danh máy tính đó trên Internet. Xét tập hợp A gồm các địa chỉ IP có dạng 192.168.$abc.deg$, trong đó a, b, c là các chữ số phân biệt được chọn ra từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, còn d, e, g là các chữ số phân biệt được chọn ra từ các chữ số 5, 6, 7, 8, 9. Hỏi tập hợp A có bao nhiêu phần tử?

5. Một nhóm 22 bạn đi chụp ảnh kỉ yếu. Nhóm muốn trong bức ảnh có 7 bạn ngồi ở hàng đầu và 15 bạn đứng ở hàng sau. Có bao nhiêu cách xếp vị trí chụp ảnh như vậy?

§3 TỔ HỢP

(Nguồn: https://nhandan.vn)

Trong giải bóng bàn đôi nam, mỗi đội chọn 2 vận động viên để tạo thành một cặp đấu.

Trong toán học, mỗi cách chọn 2 vận động viên từ các vận động viên để tạo thành một cặp đấu được gọi là gì?

1. Định nghĩa

1 Đội tuyển bóng bàn nam của trường có 4 bạn Mạnh, Phong, Cường, Tiến. Huấn luyện viên muốn chọn 2 bạn để tạo thành một cặp đấu đôi nam.

a) Nêu 3 cách chọn cặp đấu.

b) Mỗi cặp đấu là một tập con gồm bao nhiêu phần tử được lấy ra từ tập hợp gồm 4 bạn nói trên?

> Cho tập hợp A gồm n phần tử và một số nguyên k với $1 \le k \le n$.
>
> Mỗi tập con gồm k phần tử được lấy ra từ n phần tử của A được gọi là một *tổ hợp chập k của n phần tử* đó.

Ví dụ 1 Bạn Quân có 4 chiếc áo sơ mi khác màu là áo vàng, áo xanh, áo trắng và áo nâu. Bạn muốn chọn 2 chiếc áo để mặc khi đi du lịch. Viết các tổ hợp chập 2 của 4 chiếc áo.

Giải

Các tổ hợp chập 2 của 4 chiếc áo là:

{áo vàng; áo xanh}, {áo vàng; áo trắng}, {áo vàng; áo nâu}, {áo xanh; áo trắng}, {áo xanh; áo nâu}, {áo trắng; áo nâu}.

> **1** Viết tất cả tổ hợp chập 2 của 3 phần tử a, b, c.

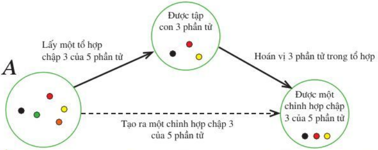
2. Số các tổ hợp

2 Cho tập hợp $A = \{a; b; c; d; e\}$.

a) Nêu cách lấy ra một tổ hợp chập 3 của 5 phần tử trong A.

b) Nêu cách lấy ra một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử trong A.

c) So sánh cách lấy ra một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử trong A với cách lấy ra một tổ hợp chập 3 của 5 phần tử trong A.



Mỗi tổ hợp chập 3 của 5 phần tử sinh ra 3! chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử vì có 3! hoán vị của 3 phần tử. Vì thế, số chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử nhiều gấp 3! lần số tổ hợp chập 3 của 5 phần tử.

Nhận xét: Số chỉnh hợp chập k của n phần tử nhiều gấp $k!$ lần số tổ hợp chập k của n phần tử đó.

> Kí hiệu C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử với $1 \leq k \leq n$. Ta có: $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!}$.

Ví dụ 2 Chứng minh $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ với $1 \leq k \leq n$.

Giải

Ta có: $A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)(n-k)...2\,.\,1}{(n-k)...2\,.\,1} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Do đó $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Quy ước: $0! = 1$; $C_n^0 = 1$.

Với những quy ước trên, ta có công thức sau:

> $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ với $0 \leq k \leq n$.

Ví dụ 3 Lớp 10A có 18 bạn nữ và 20 bạn nam.

a) Có bao nhiêu cách chọn 3 bạn nữ trong 18 bạn nữ?

b) Có bao nhiêu cách chọn 5 bạn nam trong 20 bạn nam?

c) Có bao nhiêu cách chọn một tổ xung kích gồm 3 bạn nữ và 5 bạn nam?

Giải

a) Mỗi cách chọn 3 bạn nữ trong 18 bạn nữ là một tổ hợp chập 3 của 18 phần tử, do đó có C_{18}^{3} cách chọn.

b) Mỗi cách chọn 5 bạn nam trong 20 bạn nam là một tổ hợp chập 5 của 20 phần tử, do đó có C_{20}^{5} cách chọn.

c) Số cách chọn một tổ xung kích gồm 3 bạn nữ và 5 bạn nam là:

$$C_{18}^{3} . C_{20}^{5} = 816 . 15\ 504 = 12\ 651\ 264 \text{ (cách chọn)}.$$

2 Trong một buổi tập huấn cho các bí thư chi đoàn có 10 bạn nam. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 bạn nam để tham gia một trò chơi?

3 Ta có thể tính số các tổ hợp bằng máy tính cầm tay như sau: Nút tổ hợp: nCr.

Tính	Nút ấn	Kết quả
C_{10}^{4}	10 SHIFT nCr 4 =	210

3 Dùng máy tính cầm tay để tính:

a) C_{25}^{13}; b) C_{30}^{15}.

3. Tính chất của các số C_n^k

4 Cho hai số tự nhiên n và k.

a) So sánh C_n^k và C_n^{n-k} $(0 \le k \le n)$;

b) So sánh $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$ và C_n^k $(1 \le k < n)$.

Ta có hai đẳng thức sau: $C_n^k = C_n^{n-k}$ $(0 \le k \le n)$ và $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$ $(1 \le k < n)$.

BÀI TẬP

1. Cho 8 điểm sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Có bao nhiêu tam giác với 3 đỉnh là 3 điểm trong 8 điểm đã cho?

2. Có 10 đội tham gia một giải bóng đá. Có bao nhiêu cách xếp trận đấu vòng tính điểm sao cho hai đội chỉ gặp nhau đúng một lần?

3. Khối 10 có 16 bạn nữ và 18 bạn nam tham gia đợt tình nguyện Mùa hè xanh. Đoàn trường dự định lập một tổ trồng cây gồm 3 học sinh có cả nam và nữ. Có bao nhiêu cách lập một tổ trồng cây như vậy?

4. Một quán nhỏ bày bán hoa có 50 bông hồng và 60 bông cúc. Bác Ngọc muốn mua 5 bông hoa gồm cả hai loại hoa trên. Bác Ngọc có bao nhiêu cách chọn hoa?

5. Tính tổng $C_{15}^{12} + C_{15}^{13} + C_{16}^{14}$.

§4 NHỊ THỨC NEWTON

Làm thế nào để khai triển $(a + b)^4$, $(a + b)^5$ một cách nhanh chóng?

Ta đã biết $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1 \,.\, a^3 + 3 \,.\, a^2 \,.\, b^1 + 3 \,.\, a^1 \,.\, b^2 + 1 \,.\, b^3$.

a) Tính $C_3^0, C_3^1, C_3^2, C_3^3$.

b) Chọn số thích hợp cho $\boxed{?}$ trong khai triển sau:

$$(a+b)^3 = C_3^{\boxed{?}} \,.\, a^{3-\boxed{?}} + C_3^{\boxed{?}} \,.\, a^{3-\boxed{?}} \,.\, b^1 + C_3^{\boxed{?}} \,.\, a^{3-\boxed{?}} \,.\, b^2 + C_3^{\boxed{?}} \,.\, b^3.$$

$(a+b)^3 = C_3^0 \,.\, a^{3-0} + C_3^1 \,.\, a^{3-1} \,.\, b^1 + C_3^2 \,.\, a^{3-2} \,.\, b^2 + C_3^3 \,.\, b^3.$

Mỗi số hạng trong tổng đều có dạng $C_3^k \,.\, a^{3-k} \,.\, b^k$.

Tương tự như vậy, ta có các khai triển sau:

$$(a+b)^4 = C_4^0 \,.\, a^{4-0} + C_4^1 \,.\, a^{4-1} \,.\, b^1 + C_4^2 \,.\, a^{4-2} \,.\, b^2 + C_4^3 \,.\, a^{4-3} \,.\, b^3 + C_4^4 \,.\, b^4$$
$$= C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4.$$

$$(a+b)^5 = C_5^0 \,.\, a^{5-0} + C_5^1 \,.\, a^{5-1} \,.\, b^1 + C_5^2 \,.\, a^{5-2} \,.\, b^2 + C_5^3 \,.\, a^{5-3} \,.\, b^3 + C_5^4 \,.\, a^{5-4} \,.\, b^4 + C_5^5 \,.\, b^5$$
$$= C_5^0a^5 + C_5^1a^4b + C_5^2a^3b^2 + C_5^3a^2b^3 + C_5^4ab^4 + C_5^5b^5.$$

$$(a+b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

$$(a+b)^5 = C_5^0a^5 + C_5^1a^4b + C_5^2a^3b^2 + C_5^3a^2b^3 + C_5^4ab^4 + C_5^5b^5$$
$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Những công thức khai triển nói trên là công thức nhị thức Newton $(a + b)^n$ ứng với $n = 4$; $n = 5$.

Bằng cách như thế, ta có thể khai triển được $(a + b)^n$ với n là số nguyên dương lớn hơn 5. Công thức khai triển cụ thể được trình bày trong Chuyên đề học tập Toán 10.

Ví dụ 1 Khai triển $(x+1)^4$.

Giải

Ta có: $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 \cdot 1 + 6x^2 \cdot 1^2 + 4x \cdot 1^3 + 1^4$
$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.$

> **1** Khai triển $(2+x)^4$.

Ví dụ 2 Khai triển $(x-1)^4$.

Giải

Ta có: $(x-1)^4 = [x+(-1)]^4 = x^4 + 4x^3 \cdot (-1) + 6x^2 \cdot (-1)^2 + 4x \cdot (-1)^3 + (-1)^4$
$= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$

> **2** Khai triển $(2-3y)^4$.

Ví dụ 3 Khai triển các biểu thức sau:

a) $(x-2y)^4$; b) $(3x-y)^5$.

Giải

a) Ta có:

$(x-2y)^4 = [x+(-2y)]^4 = x^4 + 4x^3(-2y) + 6x^2(-2y)^2 + 4x(-2y)^3 + (-2y)^4$
$= x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4.$

b) Ta có:

$(3x-y)^5 = [3x+(-y)]^5$
$= (3x)^5 + 5(3x)^4(-y) + 10(3x)^3(-y)^2 + 10(3x)^2(-y)^3 + 5(3x)(-y)^4 + (-y)^5$
$= 243x^5 - 405x^4y^3 + 270x^3y^2 - 90x^2y^3 + 15xy^4 - y^5.$

> **3** Tính:
>
> a) $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4$;
>
> b) $C_5^0 - C_5^1 + C_5^2 - C_5^3 + C_5^4 - C_5^5$.

BÀI TẬP

1. Khai triển các biểu thức sau:

a) $(2x+1)^4$; b) $(3y-2)^4$; c) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^4$; d) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^4$.

2. Khai triển các biểu thức sau:

a) $(x+1)^5$; b) $(x-3y)^5$.

3. Xác định hệ số của x^4 trong khai triển biểu thức $(3x+2)^5$.

4. Cho $\left(1-\frac{1}{2}x\right)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$.

a) Tính a_3.

b) Tính $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

5. Cho tập hợp A có 5 phần tử. Số tập hợp con của A là bao nhiêu?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

1. Bạn Dương có 2 chiếc quần gồm: một quần màu xanh và một quần màu đen; 3 chiếc áo gồm: một áo màu nâu, một áo màu xanh và một áo màu vàng; 2 đôi giày gồm: một đôi giày màu đen và một đôi giày màu đỏ. Bạn Dương muốn chọn một bộ quần áo và một đôi giày để đi tham quan. Bằng cách vẽ sơ đồ hình cây, tính số cách chọn một bộ quần áo và một đôi giày cho bạn Dương.

2. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, lập được bao nhiêu:

a) Số tự nhiên gồm 9 chữ số đôi một khác nhau?

b) Số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau?

c) Số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau?

3. Trong mặt phẳng, cho hai đường thẳng song song a và b. Cho 3 điểm trên đường thẳng a và 4 điểm trên đường thẳng b. Có bao nhiêu tam giác có cả 3 đỉnh là 3 điểm trong 7 điểm nói trên?

4. Trong mặt phẳng, cho 6 đường thẳng song song và 8 đường thẳng vuông góc với 6 đường thẳng đó. Có bao nhiêu hình chữ nhật được tạo thành?

5. Khai triển các biểu thức sau:

a) $(4y-1)^4$; b) $(3x+4y)^5$.

6. Mật khẩu của máy tính là một dãy các kí tự (có kể thứ tự từ trái qua phải) được chọn từ: 10 chữ số, 26 chữ cái in thường cùng với 26 chữ cái in hoa và 10 kí tự đặc biệt. Bạn Ngân muốn lập một mật khẩu máy tính có độ dài là 8 kí tự bao gồm: 4 kí tự đầu tiên là 4 chữ số khác nhau, 2 kí tự tiếp theo là chữ cái in thường, 1 kí tự tiếp theo nữa là chữ cái in hoa, kí tự cuối cùng là kí tự đặc biệt. Bạn Ngân có bao nhiêu cách lập mật khẩu?

7. Một trường trung học phổ thông tổ chức cuộc thi chạy tiếp sức giữa các lớp với nội dung 4×100 m và yêu cầu mỗi đội gồm 2 nam, 2 nữ. Bạn An được giáo viên giao nhiệm vụ chọn ra 4 bạn và sắp xếp thứ tự chạy của các bạn đó để đăng kí dự thi. Bạn An có bao nhiêu cách lập ra một đội thi đủ điều kiện đăng kí? Biết lớp bạn An có 22 nam và 17 nữ.

8. Bác Thảo muốn mua 2 chiếc máy tính để phục vụ công việc. Người bán hàng giới thiệu cho bác 3 hãng máy tính để tham khảo: hãng thứ nhất có 4 loại máy tính phù hợp, hãng thứ hai có 5 loại máy tính phù hợp, hãng thứ ba có 7 loại máy tính phù hợp. Bác Thảo có bao nhiêu cách chọn 2 máy tính dùng cho công việc?

CHƯƠNG VI

MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: số gần đúng, sai số; các số đặc trưng đo xu thế trung tâm và đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu không ghép nhóm; xác suất của biến cố.

§1 SỐ GẦN ĐÚNG. SAI SỐ

(Nguồn: https://shutterstock.com)

Trái Đất với tên gọi "Hành tinh xanh" là ngôi nhà chung của nhân loại. Trong Hệ Mặt Trời, Trái Đất là hành tinh thứ ba tính từ Mặt Trời, đồng thời cũng là hành tinh lớn nhất trong các hành tinh đất đá xét về bán kính, khối lượng và mật độ vật chất.

Trái Đất có diện tích toàn bộ bề mặt là 510,072 triệu km^2.

(Nguồn: https://vi.wikipedia.org)

Con số 510,072 (triệu km^2) *là số chính xác hay số gần đúng?*

I. SỐ GẦN ĐÚNG

1 Hoá đơn tiền điện tháng 4/2021 của gia đình bác Mai là 763 951 đồng. Trong thực tế, bác Mai đã thanh toán cho người thu tiền điện số tiền là 764 000 đồng. Tại sao bác Mai không thể thanh toán cho người thu tiền điện số tiền chính xác là 763 951 đồng?

Trong đo đạc và tính toán thực tiễn, đôi khi ta không sử dụng được các số chính xác (chẳng hạn số 763 951 ở trên) mà phải sử dụng những số gần đúng với số chính xác.

> Trong đo đạc và tính toán, ta thường chỉ nhận được các số gần đúng.

II. SAI SỐ CỦA SỐ GẦN ĐÚNG

1. Sai số tuyệt đối

2 Một bồn hoa có dạng hình tròn với bán kính là 0,8 m.

a) Viết công thức tính diện tích S của bồn hoa theo π và bán kính 0,8 m.

b) Khi tính diện tích của bồn hoa, bạn Ngân lấy một giá trị gần đúng của π là 3,1 và được kết quả là:

$$3{,}1\ .\ (0{,}8)^2 = 1{,}984\ (\text{m}^2).$$

Giá trị $|S - 1{,}984|$ biểu diễn điều gì?

(Nguồn: https://commons.m.wikimedia.org)

Nếu a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ thì $\Delta_a = |\overline{a} - a|$ được gọi là *sai số tuyệt đối* của số gần đúng a (*Hình 1*).

Hình 1

Ví dụ 1 Một bồn hoa có dạng hình tròn với bán kính là 0,8 m. Hai bạn Ngân và Ánh cùng muốn tính diện tích S của bồn hoa đó. Bạn Ngân lấy một giá trị gần đúng của π là 3,1 và được kết quả là S_1. Bạn Ánh lấy một giá trị gần đúng của π là 3,14 và được kết quả là S_2. So sánh sai số tuyệt đối Δ_{S_1} của số gần đúng S_1 và sai số tuyệt đối Δ_{S_2} của số gần đúng S_2. Bạn nào cho kết quả chính xác hơn?

Giải

Ta có: $S_1 = 3{,}1\ .\ (0{,}8)^2 = 1{,}984\ (\text{m}^2)$;

$S_2 = 3{,}14\ .\ (0{,}8)^2 = 2{,}0096\ (\text{m}^2)$.

Ta thấy: $3{,}1 < 3{,}14 < \pi$ nên $3{,}1\ .\ (0{,}8)^2 < 3{,}14\ .\ (0{,}8)^2 < \pi\ .\ (0{,}8)^2$ tức là $S_1 < S_2 < S$.

Suy ra $\Delta_{S_2} = |S - S_2| < |S - S_1| = \Delta_{S_1}$. Vậy bạn Ánh cho kết quả chính xác hơn.

Chú ý: Sai số tuyệt đối của số gần đúng nhận được trong một phép đo đạc, tính toán càng bé thì kết quả của phép đo đạc, tính toán đó càng chính xác.

2. Độ chính xác của một số gần đúng

3 Hãy ước lượng sai số tuyệt đối Δ_{S_1} ở *Ví dụ 1*.

Để ước lượng sai số tuyệt đối đó, ta làm như sau:

Do $3{,}1 < \pi < 3{,}15$ nên $3{,}1 \,.\, (0{,}8)^2 < \pi \,.\, (0{,}8)^2 < 3{,}15 \,.\, (0.8)^2$. Suy ra $1{,}984 < S < 2{,}016$.

Vậy $\Delta_{S_1} = \left|S - S_1\right| < 2{,}016 - 1{,}984 = 0{,}032$.

Ta nói: Kết quả của bạn Ngân có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,032 hay có độ chính xác là 0,032.

Nhận xét: Giả sử a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ sao cho $\Delta_a = \left|\overline{a} - a\right| \le d$.

Khi đó: $\Delta_a = \left|\overline{a} - a\right| \le d \Leftrightarrow -d \le \overline{a} - a \le d \Leftrightarrow a - d \le \overline{a} \le a + d$.

Một cách tổng quát:

> Ta nói a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ với độ chính xác d nếu $\Delta_a = \left|\overline{a} - a\right| \le d$ và quy ước viết gọn là $\overline{a} = a \pm d$.

Nhận xét: Nếu $\Delta_a \le d$ thì số đúng $\overline{a}$ nằm trong đoạn $[a - d\,;\, a + d]$. Bởi vậy, d càng nhỏ thì độ sai lệch của số gần đúng a so với số đúng $\overline{a}$ càng ít. Điều đó giải thích vì sao d được gọi là độ chính xác của số gần đúng.

Ví dụ 2 Hãy ước lượng sai số tuyệt đối Δ_{S_2} ở *Ví dụ 1*.

Giải

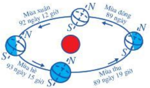
Do $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ nên $3{,}14 \,.\, (0{,}8)^2 < \pi \,.\, (0{,}8)^2 < 3{,}15 \,.\, (0{,}8)^2$. Suy ra $2{,}0096 < S < 2{,}016$.

Vậy $\Delta_{S_2} = \left|S - S_2\right| < 2{,}016 - 2{,}0096 = 0{,}0064$.

Ta nói: Kết quả của bạn Ánh có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,0064 hay có độ chính xác là 0,0064. Khi đó ta có thể viết $S = 2{,}0096 \pm 0{,}0064$.

3. Sai số tương đối

4 Các nhà thiên văn tính được thời gian để Trái Đất quay một vòng xung quanh Mặt Trời là 365 ngày $\pm \dfrac{1}{4}$ ngày. Bạn Hùng tính thời gian đi bộ một vòng xung quanh sân vận động của trường khoảng 15 phút $\pm$ 1 phút. Trong hai phép đo trên, phép đo nào chính xác hơn?



Phép đo của các nhà thiên văn có sai số tuyệt đối không vượt quá $\frac{1}{4}$ ngày, có nghĩa là không vượt quá 360 phút. Phép đo của Hùng có sai số tuyệt đối không vượt quá 1 phút. Nếu chỉ so sánh 360 phút và 1 phút thì có thể dẫn đến hiểu rằng phép đo của bạn Hùng chính xác hơn phép đo của các nhà thiên văn. Tuy nhiên, $\frac{1}{4}$ ngày hay 360 phút là độ chính xác của phép đo một chuyển động trong 365 ngày, còn 1 phút là độ chính xác của phép đo một chuyển động trong 15 phút. So sánh hai tỉ số $\frac{\frac{1}{4}}{365} = \frac{1}{1\,460} = 0{,}0006849...$ và $\frac{1}{15} = 0{,}0666...$, ta thấy rằng phép đo của các nhà thiên văn chính xác hơn nhiều.

Ví dụ trên cho ta thấy: Sai số tuyệt đối của số gần đúng nhận được trong một phép đo đạc, tính toán đôi khi không phản ánh đầy đủ tính chính xác của phép đo đạc, tính toán đó.

Vì vậy, ngoài sai số tuyệt đối Δ_a của số gần đúng a, người ta còn xét một tỉ số khác liên quan đến sai số.

Tỉ số $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$ được gọi là *sai số tương đối* của số gần đúng a.

Nhận xét

• Nếu $\overline{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \leq d$. Do đó $\delta_a \leq \frac{d}{|a|}$. Vì vậy, nếu $\frac{d}{|a|}$ càng bé thì chất lượng của phép đo đạc hay tính toán càng cao.

• Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm. Chẳng hạn, trong phép đo thời gian Trái Đất quay một vòng xung quanh Mặt Trời thì sai số tương đối không vượt quá

$$\frac{\frac{1}{4}}{365} = \frac{1}{1\,460} \approx 0{,}068\%.$$

III. SỐ QUY TRÒN. QUY TRÒN SỐ GẦN ĐÚNG

5 Trước hết, ta nêu lại quy tắc làm tròn số nguyên hoặc số thập phân đến một hàng nào đó (gọi là hàng quy tròn) như sau:

• Nếu chữ số ngay sau hàng quy tròn nhỏ hơn 5 thì ta chỉ việc thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi 0.

• Nếu chữ số ngay sau hàng quy tròn lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cũng làm như trên nhưng cộng thêm một đơn vị vào chữ số của hàng quy tròn.

Sử dụng quy tắc trên, hãy quy tròn số:

a) 123 456 đến hàng trăm;

b) 1,58 đến hàng phần mười;

c) 3,14159265... đến hàng phần trăm.

Nhận xét: Khi quy tròn số 123 456 đến hàng trăm ta được số 123 500. Số 123 500 gọi là *số quy tròn* của số ban đầu.

Khi quy tròn một số nguyên hoặc một số thập phân đến một hàng nào đó thì số nhận được gọi là *số quy tròn* của số ban đầu.

6 Quy tròn số 3,141 đến hàng phần trăm rồi tính sai số tuyệt đối của số quy tròn.

Khi quy tròn số 3,141 đến hàng phần trăm ta được số 3,14 và sai số tuyệt đối của số quy tròn là $|3,141 - 3,14| = 0,001 < 0,005$. Do vậy 3,14 là số gần đúng của 3,141 với độ chính xác 0,005.

Nhận xét: Khi thay số đúng bởi số quy tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số quy tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng quy tròn. Như vậy, độ chính xác của số quy tròn bằng nửa đơn vị của hàng quy tròn.

Từ nhận xét trên ta có thể viết số quy tròn của số gần đúng căn cứ vào độ chính xác cho trước.

Ví dụ 3 Viết số quy tròn của mỗi số sau với độ chính xác d:

a) 2 841 331 với $d = 400$;

b) 4,1463 với $d = 0,01$;

c) 1,4142135... với $d = 0,001$.

Giải

a) Vì độ chính xác $d = 400$ thoả mãn $100 < 400 < 500$ nên ta quy tròn số 2 841 331 đến hàng nghìn theo quy tắc ở trên.

Vậy số quy tròn của số 2 841 331 với độ chính xác $d = 400$ là 2 841 000.

b) Vì độ chính xác $d = 0,01$ thoả mãn $0,01 < 0,05$ nên ta quy tròn số 4,1463 đến hàng phần mười theo quy tắc ở trên.

Vậy số quy tròn của số 4,1463 với độ chính xác $d = 0,01$ là 4,1.

c) Vì độ chính xác $d = 0,001$ thoả mãn $0,001 < 0,005$ nên ta quy tròn số 1,4142135... đến hàng phần trăm theo quy tắc ở trên.

Vậy số quy tròn của số 1,4142135... với độ chính xác $d = 0,001$ là 1,41.

1 Viết số quy tròn của mỗi số sau với độ chính xác d:

a) 28,4156 với $d = 0,001$;

b) 1,7320508... với $d = 0,0001$.

7 Qua *Ví dụ 3*, ta thấy nếu số đúng là số nguyên hoặc số thập phân thì ta có thể tìm dễ dàng số gần đúng với độ chính xác cho trước bằng cách quy tròn về hàng thích hợp. Tuy nhiên, việc biểu diễn số thực về dạng số nguyên hoặc số thập phân trong thực tiễn là không đơn giản. Ngày nay, ta có thể sử dụng máy tính cầm tay hoặc các phương tiện tính toán hiện đại để giải quyết vấn đề đó.

Sử dụng máy tính cầm tay, tính $3^7 . \sqrt{14}$ (trong kết quả lấy bốn chữ số ở phần thập phân).

Để thực hiện phép tính trên ra kết quả có bốn chữ số ở phần thập phân, ta làm như sau:

- Ấn liên tiếp $\boxed{3}$ $\boxed{x^{\square}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\sqrt{\square}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$
- Tiếp tục ấn lần lượt $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{SETUP}}$ $\boxed{6}$ thì màn hình hiện ra Fix 0 ~ 9?

Ấn tiếp $\boxed{4}$ để lấy bốn chữ số thập phân. Kết quả hiện ra màn hình là 8183.0047.

2 Dùng máy tính cầm tay, tính kết quả của phép tính $\sqrt[3]{15} : 5 - 2$ (trong kết quả lấy hai chữ số ở phần thập phân).

Ví dụ 4 Một tờ giấy A4 có dạng hình chữ nhật với chiều dài, chiều rộng lần lượt là 29,7 cm và 21 cm. Tính độ dài đường chéo của tờ giấy A4 đó và xác định độ chính xác của kết quả tìm được.

Giải

Gọi x là độ dài đường chéo của tờ giấy A4 đã cho. Theo định lí Pythagore, ta có:

$$x = \sqrt{29,7^2 + 21^2} = \sqrt{882,09 + 441} = \sqrt{1\,323,09} = 36,3743...$$

Nếu lấy giá trị gần đúng của x là 36,37 ta có: $36,37 < x < 36,375$.

Suy ra $|x - 36,37| < 36,375 - 36,37 = 0,005$.

Vậy độ dài đường chéo của tờ giấy A4 đã cho là $x \approx 36,37$ và độ chính xác của kết quả tìm được là 0,005, hay nói cách khác $x = 36,37 \pm 0,005$.

BÀI TẬP

1. Quy tròn số $-3,2475$ đến hàng phần trăm. Số gần đúng nhận được có độ chính xác là bao nhiêu?
2. Viết số quy tròn của mỗi số sau với độ chính xác d:
   a) 28,4156 với $d = 0,001$; b) 1,7320508... với $d = 0,0001$.
3. Biết $\sqrt{2} = 1,41421356237...$ Viết số gần đúng của $\sqrt{2}$ theo nguyên tắc quy tròn lần lượt với hai, ba, bốn chữ số thập phân và ước lượng sai số tuyệt đối.
4. Ta đã biết 1 inch (kí hiệu là in) là 2,54 cm. Màn hình của một chiếc ti vi có dạng hình chữ nhật với độ dài đường chéo là 32 in, tỉ số giữa chiều dài và chiều rộng của màn hình là 16 : 9. Tìm một giá trị gần đúng (theo đơn vị in) của chiều dài ti vi và tìm sai số tuyệt đối, độ chính xác của số gần đúng đó.
5. Hãy tìm hiểu khối lượng của Trái Đất, Mặt Trời và viết kết quả dưới dạng số gần đúng.

§2 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

Việt Nam	6 – 0	Brunei
Việt Nam	6 – 1	Lào
Việt Nam	2 – 1	Indonesia
Singapore	0 – 1	Việt Nam
Việt Nam	2 – 2	Thái Lan
Việt Nam	4 – 0	Campuchia
Indonesia	0 – 3	Việt Nam

Bảng 1. Bảng kết quả thi đấu bóng đá của đội tuyển bóng đá nam U22 Việt Nam tại SEA Games 30

SEA Games 30 đã đi vào lịch sử của Thể thao Việt Nam. Lần đầu tiên, Việt Nam cùng được Huy chương Vàng cả bóng đá nam và bóng đá nữ. Đặc biệt, số bàn thắng trung bình của đội tuyển bóng đá nam U22 Việt Nam trong mỗi trận đấu là 3,43.

Số bàn thắng trung bình trong mỗi trận đấu được tính như thế nào?

I. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG (SỐ TRUNG BÌNH)

1. Định nghĩa

1 Kết quả đo chiều cao (đơn vị: xăng-ti-mét) của 5 bạn nam tổ I là:

165 172 172 171 170

Tính trung bình cộng của 5 số trên.

Số trung bình cộng của một mẫu n số liệu thống kê bằng tổng của các số liệu chia cho số các số liệu đó. Số trung bình cộng của mẫu số liệu $x_1, x_2, ..., x_n$ bằng

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Ví dụ 1 Kết quả 4 lần kiểm tra môn Toán của bạn Hoa là: 7 9 8 9

Tính số trung bình cộng $\overline{x}$ của mẫu số liệu trên.

Giải

Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là

$$\overline{x} = \frac{7+9+8+9}{4} = \frac{33}{4} = 8{,}25.$$

1 Quan sát *Bảng 1* và giải thích tại sao số bàn thắng trung bình của đội tuyển bóng đá nam U22 Việt Nam trong mỗi trận đấu là 3,43.

Nhận xét: Công thức tính số trung bình cộng $\overline{x}$ khi có các số liệu thống kê bằng nhau có thể viết lại ở dạng:

$$\overline{x} = \frac{7+8+2.9}{1+1+2} = \frac{33}{4} = 8{,}25.$$

Ta có thể tính số trung bình cộng theo các công thức sau:

• Số trung bình cộng của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số là:

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k}{n_1 + n_2 + ... + n_k}.$$

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

• Số trung bình cộng của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số tương đối là:

$$\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_kx_k,$$

trong đó $f_1 = \frac{n_1}{n}$, $f_2 = \frac{n_2}{n}$, ..., $f_k = \frac{n_k}{n}$,

với $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số tương đối	f_1	f_2	...	f_k

2. Ý nghĩa

Trong thực tiễn, để tìm hiểu một đối tượng thống kê ta đưa ra tiêu chí thống kê và tiến hành thu thập nhiều lần số liệu thống kê theo tiêu chí đó, tạo thành mẫu số liệu. Căn cứ vào mẫu số liệu đó, ta rút ra những kết luận có ích về đối tượng thống kê. Để kết luận rút ra phản ánh đúng đắn bản chất của đối tượng, ta cần nhận biết được hình thái và xu thế thay đổi của mẫu số liệu. Với cách nhìn nhận như thế, số trung bình cộng của mẫu số liệu có ý nghĩa sau:

Khi các số liệu trong mẫu ít sai lệch với số trung bình cộng, ta có thể giải quyết được vấn đề trên bằng cách lấy số trung bình cộng làm đại diện cho mẫu số liệu.

Chẳng hạn, để dự báo lượng mưa trong tháng 8 tại Hà Nội người ta tiến hành đo lượng mưa của từng ngày trong tháng 8 tại Hà Nội, ta được mẫu số liệu gồm 31 số liệu. Số trung bình cộng của mẫu số liệu đó được xem như lượng mưa trung bình tháng 8 của Hà Nội. Thống kê lượng mưa trung bình tháng 8 của Hà Nội trong nhiều năm liên tiếp sẽ cho ta những dự báo (ngày càng chính xác hơn) lượng mưa trung bình tháng 8 của Hà Nội trong những năm sắp tới.

II. TRUNG VỊ

1. Định nghĩa

2 Điểm kiểm tra môn Toán của một nhóm gồm 9 học sinh như sau:

1 1 3 6 7 8 8 9 10

Tính số trung bình cộng của mẫu số liệu trên và nêu nhận xét.

Nhận xét: Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là

$$\overline{x} = \frac{1+1+3+6+7+8+8+9+10}{9} \approx 5{,}9.$$

Quan sát mẫu số liệu trên, ta thấy nhiều số liệu có sự chênh lệch lớn so với số trung bình cộng. Vì vậy, ta không thể lấy số trung bình cộng làm đại diện cho mẫu số liệu mà ta phải chọn số đặc trưng khác thích hợp hơn. Cụ thể, ta chọn số đứng giữa mẫu số liệu trên, tức là số 7, làm đại diện cho mẫu số liệu đó.

Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm n số liệu thành một dãy không giảm (hoặc không tăng).

- Nếu n là lẻ thì số liệu đứng ở vị trí thứ $\frac{n+1}{2}$ (số đứng chính giữa) gọi là *trung vị*.
- Nếu n là chẵn thì số trung bình cộng của hai số liệu đứng ở vị trí thứ $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{2}+1$ gọi là *trung vị*.

Trung vị kí hiệu là M_e.

Ví dụ 2 Thời gian (tính theo phút) mà 10 người đợi ở bến xe buýt là:

2,8 1,2 3,4 14,6 1,3 2,5 4,2 1,9 3,5 0,8

Tìm trung vị của mẫu số liệu trên.

Giải

Bước 1. Sắp xếp các số liệu của mẫu trên theo thứ tự không giảm:

0,8 1,2 1,3 1,9 2,5 2,8 3,4 3,5 4,2 14,6

Bước 2. Xác định xem số các số liệu là số chẵn hay số lẻ để tìm trung vị:

Mẫu số liệu trên có 10 số. Số thứ năm và số thứ sáu lần lượt là 2,5 và 2,8.

Vì vậy $M_e = \frac{2{,}5+2{,}8}{2} = 2{,}65$ (phút).

2 Nhiệt độ buổi tối ở Hà Nội ngày 21/11/2021 lúc 20 giờ, 21 giờ, 22 giờ, 23 giờ lần lượt là 26, 25, 23, 23 (đơn vị: °C).

(*Nguồn: https://accuweather.com*)

Tìm trung vị của mẫu số liệu trên.

Nhận xét

- Trung vị không nhất thiết là một số trong mẫu số liệu và dễ tính toán.
- Khi các số liệu trong mẫu không có sự chênh lệch lớn thì số trung bình cộng và trung vị xấp xỉ nhau.

2. Ý nghĩa

Nếu những số liệu trong mẫu có sự chênh lệch lớn thì ta nên chọn thêm trung vị làm đại diện cho mẫu số liệu đó nhằm điều chỉnh một số hạn chế khi sử dụng số trung bình cộng. Những kết luận về đối tượng thống kê rút ra khi đó sẽ tin cậy hơn.

Chẳng hạn, số trung bình cộng của mẫu số liệu thống kê trong *Ví dụ 2* là:

$$\overline{x} = \frac{2{,}8 + 1{,}2 + 3{,}4 + 14{,}6 + 1{,}3 + 2{,}5 + 4{,}2 + 1{,}9 + 3{,}5 + 0{,}8}{10} = 3{,}62 \text{ (phút)}.$$

Vì thế, nếu chọn thêm trung vị $M_e = 2{,}65$ (phút) làm đại diện cho mẫu số liệu đó thì kết luận về thời gian đợi ở bến xe buýt sẽ tin cậy hơn.

III. TỨ PHÂN VỊ

1. Định nghĩa

3 Xét mẫu số liệu được xếp theo thứ tự tăng dần:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Tìm trung vị của mẫu số liệu trên.

Nhận xét

Trung vị của mẫu số liệu trên là 6. Tuy nhiên, nhiều số liệu trong mẫu vẫn có sự chênh lệch lớn so với 6, chẳng hạn: 1, 2, 10, 11. Vì thế, ta cần chọn thêm những phần tử đặc trưng cho mẫu số liệu.

Nửa dãy **phía dưới** số 6 (tức là những số nhỏ hơn 6) bao gồm 1, 2, 3, 4, 5, **có** trung vị là 3.

Nửa dãy **phía trên** số 6 (tức là những số lớn hơn 6) bao gồm 7, 8, 9, 10, 11, **có** trung vị là 9.

Ba phần tử 3, 6, 9 chia mẫu số liệu thành bốn phần có số lượng phần tử bằng nhau là $\{1; 2\}$, $\{4; 5\}$, $\{7; 8\}$, $\{10; 11\}$.

Ta chọn bộ ba số 3, 6, 9 là bộ số đặc trưng cho mẫu số liệu.

Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm N số liệu thành một dãy không giảm.

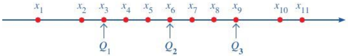
Tứ phân vị ***của mẫu số liệu trên là bộ ba giá trị: tứ phân vị thứ nhất, tứ phân vị thứ hai và tứ phân vị thứ ba; ba giá trị này chia mẫu số liệu thành bốn phần có số lượng phần tử bằng nhau.***

- **Tứ phân vị thứ hai Q_2 bằng trung vị.**

• Nếu N là số chẵn thì tứ phân vị thứ nhất Q_1 bằng trung vị của nửa dãy phía dưới và tứ phân vị thứ ba Q_3 bằng trung vị của nửa dãy phía trên.

• Nếu N là số lẻ thì tứ phân vị thứ nhất Q_1 bằng trung vị của nửa dãy phía dưới (không bao gồm Q_2) và tứ phân vị thứ ba Q_3 bằng trung vị của nửa dãy phía trên (không bao gồm Q_2).

Ta minh họa tứ phân vị của mẫu số liệu gồm 11 số liệu trên trục số như sau:



Ví dụ 3 Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu:

21 35 17 43 8 59 72 119

Biểu diễn tứ phân vị đó trên trục số.

Giải

Mẫu số liệu trên được sắp xếp theo thứ tự tăng dần như sau:

8 17 21 35 43 59 72 119

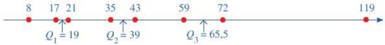
Trung vị của mẫu số liệu trên là: $\dfrac{35+43}{2} = 39$.

Trung vị của dãy 8, 17, 21, 35 là: $\dfrac{17+21}{2} = 19$.

Trung vị của dãy 43, 59, 72, 119 là: $\dfrac{59+72}{2} = 65{,}5$.

Vậy $Q_1 = 19$, $Q_2 = 39$, $Q_3 = 65{,}5$.

Tứ phân vị đó được biểu diễn trên trục số như sau:



3 Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu:

11 48 62 81 93 99 127

Biểu diễn tứ phân vị trên trục số.

2. Ý nghĩa

• Trong thực tiễn, có những mẫu số liệu mà nhiều số liệu trong mẫu đó vẫn còn sự chênh lệch lớn so với trung vị. Ta nên chọn thêm những số khác cùng làm đại diện cho mẫu đó. Bằng cách lấy thêm trung vị của từng dãy số liệu tách ra bởi trung vị của mẫu nói trên, ta nhận được tứ phân vị đại diện cho mẫu số liệu đó.

• Bộ ba giá trị Q_1, Q_2, Q_3 trong tứ phân vị phản ánh độ phân tán của mẫu số liệu. Nhưng mỗi giá trị Q_1, Q_2, Q_3 lại đo xu thế trung tâm của phần số liệu tương ứng của mẫu đó.

IV. MỐT

1. Định nghĩa

4 Bác Tâm khai trương cửa hàng bán áo sơ mi nam. Số áo cửa hàng đã bán ra trong tháng đầu tiên được thống kê trong bảng tần số sau:

Cỡ áo	37	38	39	40	41	42	43
Tần số (Số áo bán được)	15	46	62	81	51	20	3

Cỡ áo nào cửa hàng bác Tâm bán được nhiều nhất trong tháng đầu tiên?

Ta có định nghĩa sau:

Mốt của mẫu số liệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng phân bố tần số và kí hiệu là M_o.

Chú ý: Một mẫu số liệu có thể có một hoặc nhiều mốt.

Ví dụ 4 Mốt trong bảng tần số thống kê số áo bán ra trong tháng đầu tiên của cửa hàng ở Hoạt động 4 là bao nhiêu?

Giải

Vì tần số lớn nhất là 81 và 81 tương ứng với cỡ áo 40 nên mốt của bảng trên là 40.

4 Kết quả thi thử môn Toán của lớp 10A như sau:

5 6 7 5 6 9 10 8 5 5 4 5 4 5 7 4 5 8 9 10

5 4 5 6 5 7 5 8 4 9 5 6 5 6 8 8 7 9 7 9

a) Mốt của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?

b) Tính tỉ lệ số học sinh lớp 10A đạt điểm từ 8 trở lên. Tỉ lệ đó phản ánh điều gì?

2. Ý nghĩa

Mốt của một mẫu số liệu đặc trưng cho số lần lặp đi lặp lại nhiều nhất tại một vị trí của mẫu số liệu đó. Dựa vào mốt, ta có thể đưa ra những kết luận (có ích) về đối tượng thống kê.

Chẳng hạn, trong *Ví dụ 4*, mốt trong bảng tần số thống kê số áo bán ra trong tháng đầu tiên của cửa hàng là 40. Do vậy, bác Tâm nên nhập về nhiều hơn cỡ áo 40 để bán trong tháng tiếp theo.

V. TÍNH HỢP LÍ CỦA SỐ LIỆU THỐNG KÊ

5 Đọc kĩ các nội dung sau:

Sau khi thu thập, tổ chức, phân loại và biểu diễn số liệu bằng bảng hoặc biểu đồ, ta cần phân tích và xử lí các số liệu đó để xem xét tính hợp lí của số liệu thống kê, đặc biệt chỉ ra được những số liệu bất thường (hay còn gọi là dị biệt, trong tiếng Anh là Outliers). Ta có thể sử dụng các số liệu đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu không ghép nhóm để thực hiện điều đó.

Ví dụ 5 Mẫu số liệu sau ghi lại cân nặng của 40 bạn học sinh lớp 10 của một trường trung học phổ thông (đơn vị: ki-lô-gam):

30	32	45	45	45	47	48	44	44	49
49	49	52	51	50	50	53	55	54	54
54	56	57	57	58	58,5	58,5	60	60	60
60	63,5	63	62	69	58,5	88	85	72	71

a) Xác định trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

b) Từ kết quả câu a), bước đầu xác định những số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

Giải

a) Mẫu số liệu trên được sắp xếp theo thứ tự tăng dần như sau:

30	32	44	44	45	45	45	47	48	49
49	49	50	50	51	52	53	54	54	54
55	56	57	57	58	58,5	58,5	60	60	60
60	62	63	63,5	68,5	69	71	72	85	88

- Trung vị của mẫu số liệu trên là: $\frac{54+55}{2} = 54{,}5$.
- Trung vị của nửa dãy phía dưới 30 32 44 44 45 45 45 47 48 49 49 49 50 50 51 52 53 54 54 54 là: $\frac{49+49}{2} = 49$.
- Trung vị của nửa dãy phía trên 55 56 57 57 58 58,5 58,5 60 60 60 60 62 63 63,5 68,5 69 71 72 85 88 là: $\frac{60+60}{2} = 60$.

Vậy $Q_1 = 49$; $Q_2 = 54{,}5$; $Q_3 = 60$.

b) Dựa vào trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho, bước đầu ta có thể thấy những số liệu bất thường trong mẫu số liệu đó là: 30 32 85 88.

Chú ý: Trong thực tiễn, những số liệu bất thường của mẫu số liệu được xác định bằng những công cụ toán học sâu sắc hơn.

BÀI TẬP

1. Chiều cao (đơn vị: xăng-ti-mét) của các bạn tổ I ở lớp 10A lần lượt là:

165 155 171 167 159 175 165 160 158

Đối với mẫu số liệu trên, hãy tìm:

a) Số trung bình cộng; b) Trung vị; c) Mốt; d) Tứ phân vị.

2. Số đôi giày bán ra trong Quý IV năm 2020 của một cửa hàng được thống kê trong bảng tần số sau:

Cỡ giày	37	38	39	40	41	42	43	44
Tần số (Số đôi giày bán được)	40	48	52	70	54	47	28	3

a) Mốt của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?

b) Cửa hàng đó nên nhập về nhiều hơn cỡ giày nào để bán trong tháng tiếp theo?

3. *Bảng 2* cho biết nhiệt độ trung bình các tháng trong năm ở Hà Nội.

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ (^oC)	16,4	17,0	20,2	23,7	27,3	28,8	28,9	28,2	27,2	24,6	21,4	18,2

(Nguồn: Tập bản đồ Địa lí 6, NXB Giáo dục Việt Nam, 2020)

Bảng 2

a) Nhiệt độ trung bình trong năm ở Hà Nội là bao nhiêu?

b) Nhiệt độ trung bình của tháng có giá trị thấp nhất là bao nhiêu độ C? Cao nhất là bao nhiêu độ C?

4. *Bảng 3* cho biết tổng diện tích rừng từ năm 2008 đến năm 2019 ở nước ta.

Năm	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Tổng diện tích rừng (triệu ha)	13,1	13,2	13,4	13,5	13,9	14,0	13,8	14,1	14,4	14,4	14,5	14,6

(Nguồn: https://baodantoc.vn)

Bảng 3

a) Diện tích rừng trung bình của nước ta từ năm 2008 đến năm 2019 là bao nhiêu?

b) Từ năm 2008 đến năm 2019, diện tích rừng của năm có giá trị thấp nhất là bao nhiêu triệu héc-ta? Cao nhất là bao nhiêu triệu héc-ta?

c) So với năm 2008, tỉ lệ tổng diện tích rừng của nước ta năm 2019 tăng lên được bao nhiêu phần trăm? Theo em, tỉ lệ tăng đó là cao hay thấp?

d) Hãy tìm hiểu số liệu về tổng diện tích rừng của tỉnh em đang sống trong một số năm gần đây.

§3 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

Kết quả 5 bài kiểm tra môn Toán của hai bạn Dũng và Huy được thống kê trong bảng sau:

Điểm kiểm tra / Học sinh	Bài 1	Bài 2	Bài 3	Bài 4	Bài 5
Dũng	8	6	7	5	9
Huy	6	7	7	8	7

Bảng 4

Kết quả làm bài kiểm tra môn Toán của bạn nào đồng đều hơn?

I. KHOẢNG BIẾN THIÊN. KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ

1. Định nghĩa

1 Kết quả của 11 lần đo được thống kê trong mẫu số liệu sau:

$$2 \quad 5 \quad 16 \quad 8 \quad 7 \quad 9 \quad 10 \quad 12 \quad 14 \quad 11 \quad 6 \qquad (1)$$

a) Tìm hiệu giữa số đo lớn nhất và số đo nhỏ nhất.

b) Sắp xếp các số liệu của mẫu (1) theo thứ tự tăng dần. Tìm các giá trị Q_1, Q_2, Q_3 là tứ phân vị của mẫu đó. Sau đó, tìm hiệu $Q_3 - Q_1$.

Nhận xét

- Trong mẫu số liệu (1), hiệu giữa số đo lớn nhất và số đo nhỏ nhất là

$$R = x_{max} - x_{min} = 16 - 2 = 14.$$

Số R gọi là *khoảng biến thiên* của mẫu số liệu (1).

- Sắp xếp các số liệu của mẫu (1) theo thứ tự tăng dần, ta được:

$$2 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 14 \quad 16$$

Vậy $Q_1 = 6$; $Q_2 = 9$; $Q_3 = 12$. Suy ra $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 12 - 6 = 6$ và gọi là *khoảng tứ phân vị* của mẫu số liệu (1).

- Trong một mẫu số liệu, *khoảng biến thiên* là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó.

Ta có thể tính khoảng biến thiên R của mẫu số liệu theo công thức sau: $R = x_{max} - x_{min}$, trong đó x_{max} là giá trị lớn nhất, x_{min} là giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó.

- Giả sử Q_1, Q_2, Q_3 là tứ phân vị của mẫu số liệu. Ta gọi hiệu $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ là *khoảng tứ phân vị*, của mẫu số liệu đó.

Chú ý: Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu còn gọi là khoảng trải giữa (tiếng Anh là InterQuartile Range – IQR) của mẫu số liệu đó.

Ví dụ 1 Mẫu số liệu thống kê chiều cao (đơn vị: mét) của 15 cây bạch đàn là:

6,3 6,6 7,5 8,2 8,3 7,8 7,9 9,0 8,9 7,2 7,5 8,7 7,7 8,8 7,6 (2)

a) Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu (2).

b) Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu (2).

Giải

a) Trong mẫu số liệu (2), số lớn nhất là 9,0 và số bé nhất là 6,3. Vậy khoảng biến thiên của mẫu số liệu (2) là:

$$R = x_{max} - x_{min} = 9{,}0 - 6{,}3 = 2{,}7 \text{ (m)}.$$

b) Sắp xếp các số liệu của mẫu (2) theo thứ tự tăng dần, ta được:

6,3 6,6 7,2 7,5 7,5 7,6 7,7 7,8 7,9 8,2 8,3 8,7 8,8 8,9 9,0

Do đó $Q_1 = 7{,}5$ (m); $Q_2 = 7{,}8$ (m); $Q_3 = 8{,}7$ (m).

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu (2) là: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 8{,}7 - 7{,}5 = 1{,}2$ (m).

2. Ý nghĩa

a) Ý nghĩa của khoảng biến thiên: *Khoảng biến thiên của mẫu số liệu phản ánh sự "dao động", "sự dàn trải" của các số liệu trong mẫu đó.* Khoảng biến thiên được sử dụng trong nhiều tình huống thực tiễn, chẳng hạn: tìm ra sự phân tán điểm kiểm tra của một lớp học hay xác định phạm vi giá cả của một dịch vụ ...

Theo cách nhìn như ở trong vật lí, ở đó biên độ dao động phản ánh khoảng cách từ điểm cân bằng đến điểm xa nhất của dao động, nếu coi số trung bình cộng là "điểm cân bằng" của mẫu số liệu thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu có thể xem như hai lần biên độ dao động của các số trong mẫu đó quanh điểm cân bằng.

Trong các đại lượng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu, khoảng biến thiên là đại lượng dễ hiểu, dễ tính toán và tương đối tốt đối với các mẫu số liệu nhỏ. Tuy nhiên, do khoảng biến thiên chỉ sử dụng hai giá trị x_{max} và x_{min} của mẫu số liệu nên đại lượng đó chưa diễn giải đầy đủ sự phân tán của các số liệu trong mẫu. Ngoài ra, giá trị của khoảng biến thiên sẽ bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường của mẫu số liệu đó. Trong những trường hợp như vậy, khoảng biến thiên của mẫu số liệu không phản ánh chính xác độ dàn trải của mẫu số liệu.

b) Ý nghĩa của khoảng tứ phân vị: *Khoảng tứ phân vị là một đại lượng cho biết mức độ phân tán của nửa giữa mẫu số liệu và có thể giúp xác định các giá trị bất thường của mẫu số liệu đó.* Khoảng tứ phân vị thường được sử dụng thay cho khoảng biến thiên vì nó loại trừ hầu hết giá trị bất thường của mẫu số liệu.

II. PHƯƠNG SAI

1. Định nghĩa

2 Số liệu thống kê kết quả 5 bài kiểm tra môn Toán của bạn Dũng là: 8 6 7 5 9 (3) (xem *Bảng 4*).

Số trung bình cộng của mẫu số liệu (3) là:

$$\overline{x} = \frac{8+6+7+5+9}{5} = 7.$$

Mỗi hiệu giữa số liệu và số trung bình cộng gọi là *độ lệch* của số liệu đó đối với số trung bình cộng.

a) Tính các độ lệch sau: $(8-7)$; $(6-7)$; $(7-7)$; $(5-7)$; $(9-7)$.

b) Tính bình phương các độ lệch và tính trung bình cộng của chúng.

Trung bình cộng của bình phương các độ lệch là:

$$s^2 = \frac{(8-7)^2+(6-7)^2+(7-7)^2+(5-7)^2+(9-7)^2}{5} = 2.$$

Số s^2 **được gọi là** *phương sai* của mẫu số liệu (3).

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho mẫu số liệu thống kê có n giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và số trung bình cộng là $\overline{x}$.

Ta gọi số $s^2 = \dfrac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n}$ là *phương sai* của mẫu số liệu trên.

Nhận xét

- Khi có các số liệu bằng nhau, ta có thể **tính phương sai** theo công thức sau:

+ Phương sai của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số là:

$$s^2 = \frac{n_1(x_1-\overline{x})^2+n_2(x_2-\overline{x})^2+\ldots+n_k(x_k-\overline{x})^2}{n},$$

trong đó $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$; $\overline{x}$ là số trung bình cộng của các số liệu đã cho.

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

+ Phương sai của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số tương đối là:

$$s^2 = f_1(x_1-\overline{x})^2+f_2(x_2-\overline{x})^2+\ldots+f_k(x_k-\overline{x})^2,$$

trong đó $\overline{x}$ là số trung bình cộng của các số liệu đã cho.

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số tương đối	f_1	f_2	...	f_k

• Trong thực tế, người ta còn dùng công thức sau để tính phương sai của một mẫu số liệu:
$\hat{s}^2 = \dfrac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n - 1}$, trong đó: x_i là giá trị của quan sát thứ i; $\overline{x}$ là giá trị trung bình và n là số quan sát trong mẫu số liệu đó.

2. Ý nghĩa

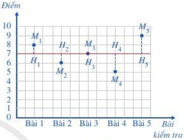
3 Xét mẫu số liệu thống kê kết quả 5 bài kiểm tra môn Toán của bạn Dũng là:

8 6 7 5 9 (3)

Số trung bình cộng của mẫu số liệu (3) là: $\overline{x} = 7$.
Quan sát *Hình 2* và so sánh:

a) Độ dài đoạn thẳng M_iH_i với độ lệch của số liệu thống kê x_i đối với số trung bình cộng $\overline{x} = 7$.

b) Tổng $M_1H_1^2 + M_2H_2^2 + M_3H_3^2 + M_4H_4^2 + M_5H_5^2$ và phương sai s^2 của mẫu số liệu (3).



Hình 2

Nhận xét: Do $M_1H_1^2 + M_2H_2^2 + M_3H_3^2 + M_4H_4^2 + M_5H_5^2 = 5s^2$ nên phương sai s^2 đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với số trung bình cộng). Phương sai là số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu.

Ví dụ 2 Xét mẫu số liệu thống kê kết quả 5 bài kiểm tra môn Toán của bạn Huy là:

6 7 7 8 7 (4) (xem *Bảng 4*).

Số trung bình cộng của mẫu số liệu (4) là: $\overline{x} = 7$.

a) Tính phương sai của mẫu số liệu (4).

b) So sánh phương sai của mẫu số liệu (4) với phương sai của mẫu số liệu (3). Từ đó cho biết bạn nào có kết quả kiểm tra môn Toán đồng đều hơn.

Giải

a) Gọi phương sai của hai mẫu số liệu (3) và (4) lần lượt là s_D^2, s_H^2. Ta có: $s_D^2 = 2$;

$$s_H^2 = \frac{(6-7)^2 + (7-7)^2 + (7-7)^2 + (8-7)^2 + (7-7)^2}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

b) Do $s_H^2 = 0{,}4 < s_D^2 = 2$ nên bạn Huy có kết quả kiểm tra môn Toán đồng đều hơn bạn Dũng.

1 Mẫu số liệu về thời gian (đơn vị: giây) chạy cự li 500 m của 5 người là:

55,2 58,8 62,4 54 59,4 (5)

Mẫu số liệu về thời gian (đơn vị: giây) chạy cự li 1500 m của 5 người đó là:

271,2 261 276 282 270 (6)

Tính phương sai của mẫu (5) và mẫu (6). Từ đó cho biết cự li chạy nào có kết quả đồng đều hơn.

III. ĐỘ LỆCH CHUẨN

1. Định nghĩa

4 Trong *Ví dụ 3*, ta đã tính phương sai của mẫu số liệu thống kê kết quả 5 bài kiểm tra môn Toán của bạn Huy là $s_H^2 = 0{,}4$. Tính $s_H = \sqrt{s_H^2}$.

Căn bậc hai của phương sai gọi là *độ lệch chuẩn* của mẫu số liệu thống kê.

Nhận xét: Vì đơn vị đo của phương sai là bình phương đơn vị đo của số liệu thống kê, trong khi độ lệch chuẩn lại có cùng đơn vị đo với số liệu thống kê, nên khi cần chú ý đến đơn vị đo thì ta sử dụng độ lệch chuẩn.

Ví dụ 3 *Bảng 5* thống kê nhiệt độ (đơn vị: °C) ở Thành phố Hồ Chí Minh ngày 03/6/2021 sau một số lần đo.

Giờ đo	1 h	4 h	7 h	10 h	13 h	16 h	19 h	22 h
Nhiệt độ (°C)	27	26	28	32	34	35	30	28

Bảng 5

a) Viết mẫu số liệu thống kê nhiệt độ nhận được từ *Bảng 5*.

b) Tính số trung bình cộng, phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Giải

a) Mẫu số liệu thống kê nhiệt độ nhận được từ *Bảng 5* là: 27 26 28 32 34 35 30 28

b) Nhiệt độ trung bình là:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{8}$$
$$= \frac{27 + 26 + 28 + 32 + 34 + 35 + 30 + 28}{8} = 30\ (^{o}\mathrm{C}).$$

Phương sai của mẫu số liệu đó là:

$$s^2 = \frac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + (x_3-\overline{x})^2 + (x_4-\overline{x})^2 + (x_5-\overline{x})^2 + (x_6-\overline{x})^2 + (x_7-\overline{x})^2 + (x_8-\overline{x})^2}{8}$$
$$= \frac{(-3)^2 + (-4)^2 + (-2)^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + 0^2 + (-2)^2}{8} = \frac{78}{8} = 9{,}75.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó là: $s = \sqrt{9{,}75} \approx 3{,}12\ (^{o}\mathrm{C})$.

2 Mẫu số liệu về số lượng áo bán ra lần lượt từ tháng 1 đến tháng 12 của một doanh nghiệp là:

430 560 450 550 760 430

525 410 635 450 800 900

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.

2. Ý nghĩa

Cũng như phương sai, khi hai mẫu số liệu thống kê có cùng đơn vị đo và có số trung bình cộng bằng nhau (hoặc xấp xỉ nhau), mẫu số liệu nào có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì mức độ phân tán (so với số trung bình cộng) của các số liệu trong mẫu đó sẽ thấp hơn. Độ lệch chuẩn là số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu thống kê có cùng đơn vị đo.

IV. TÍNH HỢP LÍ CỦA SỐ LIỆU THỐNG KÊ

Ta có thể sử dụng các số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu không ghép nhóm để chỉ ra được những số liệu bất thường của mẫu số liệu đó. Ta thường sử dụng khoảng tứ phân vị để xác định số liệu bất thường của mẫu số liệu. Cụ thể như sau:

Giả sử Q_1, Q_2, Q_3 là tứ phân vị của mẫu số liệu và hiệu $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ là khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó. Một giá trị trong mẫu số liệu được coi là một giá trị bất thường nếu nó nhỏ hơn $Q_1 - \frac{3}{2}\Delta_Q$ hoặc lớn hơn $Q_3 + \frac{3}{2}\Delta_Q$. Như vậy, khoảng tứ phân vị cho ta cách nhận ra giá trị bất thường của mẫu số liệu.

Ví dụ 4 Nêu các giá trị bất thường của mẫu số liệu thống kê sau:

5 6 19 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 48 49 (7)

Giải

Mẫu số liệu (7) có tứ phân vị là $Q_1 = 22$; $Q_2 = 27$; $Q_3 = 32$. Suy ra

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 32 - 22 = 10.$$

Các giá trị 5, 6 (nhỏ hơn $Q_1 - \frac{3}{2}\Delta_Q = 22 - \frac{3}{2}.10 = 7$) và các giá trị 48, 49 (lớn hơn $Q_3 + \frac{3}{2}\Delta_Q = 32 + \frac{3}{2}.10 = 47$) là các giá trị bất thường của mẫu số liệu (7).

Chú ý: Ta cũng có thể xác định số liệu bất thường của mẫu số liệu bằng số trung bình cộng và độ lệch chuẩn. Cụ thể như sau:

Giả sử $\overline{x}$, s lần lượt là số trung bình cộng và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu. Một giá trị trong mẫu số liệu cũng được coi là một giá trị bất thường nếu nó nhỏ hơn $\overline{x} - 3s$ hoặc lớn hơn $\overline{x} + 3s$. Như vậy, số trung bình cộng và độ lệch chuẩn cho ta cách nhận ra giá trị bất thường của mẫu số liệu.

BÀI TẬP

1. Trong 5 lần nhảy xa, hai bạn Hùng và Trung có kết quả (đơn vị: mét) lần lượt là

Hùng	2,4	2,6	2,4	2,5	2,6
Trung	2,4	2,5	2,5	2,5	2,6

a) Kết quả trung bình của hai bạn có bằng nhau hay không?

b) Tính phương sai của mẫu số liệu thống kê kết quả 5 lần nhảy xa của mỗi bạn. Từ đó cho biết bạn nào có kết quả nhảy xa ổn định hơn.

2. Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 3* biểu diễn tốc độ tăng trưởng GDP của Việt Nam giai đoạn 2012 – 2019.

a) Viết mẫu số liệu thống kê tốc độ tăng trưởng GDP nhận được từ biểu đồ ở *Hình 3*.

b) Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu đó.

c) Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

d) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.

(Nguồn https://gso.gov.vn)

Hình 3

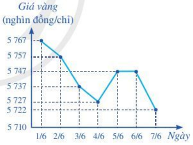
3. Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 4* biểu diễn giá vàng bán ra trong bảy ngày đầu tiên của tháng 6 năm 2021.

a) Viết mẫu số liệu thống kê giá vàng bán ra nhận được từ biểu đồ ở *Hình 4*.

b) Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu đó.

c) Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

d) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.



(Nguồn: https://bieudogiavang.vn)

Hình 4

4. Để biết cây đậu phát triển như thế nào sau khi gieo hạt, bạn Châu gieo 5 hạt đậu vào 5 chậu riêng biệt và cung cấp cho chúng lượng nước, ánh sáng như nhau. Sau hai tuần, 5 hạt đậu đã nảy mầm và phát triển thành 5 cây con. Bạn Châu đo chiều cao từ rễ đến ngọn của mỗi cây (đơn vị: mi-li-mét) và ghi kết quả là mẫu số liệu sau:

112 102 106 94 101

a) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.

b) Theo em, các cây có phát triển đồng đều hay không?

§4 XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG MỘT SỐ TRÒ CHƠI ĐƠN GIẢN

Quan sát đồng xu ở *Hình 5* ta quy ước: mặt xuất hiện số 5 000 là mặt sấp hay mặt S; mặt xuất hiện Quốc huy Việt Nam là mặt ngửa hay mặt N. Tung một đồng xu hai lần liên tiếp. Xét biến cố: "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa".

Hai mặt của đồng xu
Hình 5

Làm thế nào để tính được xác suất của biến cố nói trên?

I. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG TRÒ CHƠI TUNG ĐỒNG XU

Tung một đồng xu hai lần liên tiếp.

1 Viết tập hợp Ω các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của đồng xu sau hai lần tung.

Nhận xét

• Tập hợp Ω các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của đồng xu sau hai lần tung là Ω = {SS; SN; NS; NN}, trong đó, chẳng hạn SN là kết quả "Lần thứ nhất đồng xu xuất hiện mặt sấp, lần thứ hai đồng xu xuất hiện mặt ngửa".

• Tập hợp Ω gọi là *không gian mẫu* trong trò chơi tung một đồng xu hai lần liên tiếp.

2 Xét sự kiện "Kết quả của hai lần tung đồng xu là giống nhau".

Sự kiện nói trên bao gồm những kết quả nào trong tập hợp Ω? Viết tập hợp A các kết quả đó.

Nhận xét

• Tập hợp A các kết quả có thể xảy ra đối với sự kiện trên là: A = {SS; NN}. Ta thấy $A \subset \Omega$. Tập hợp A còn gọi là *biến cố ngẫu nhiên* (hay gọi tắt là *biến cố*) trong trò chơi nói trên. Khi đó, sự kiện đã nêu chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp A.

• Mỗi phần tử của tập hợp A được gọi là một *kết quả thuận lợi* cho biến cố A: "Kết quả của hai lần tung đồng xu là giống nhau".

Sở dĩ ta gọi những phần tử đó là kết quả thuận lợi cho biến cố trên vì chúng **đáp ứng được mong muốn** thể hiện trong biến cố, đó là mặt xuất hiện ở cả hai lần tung đồng xu là giống nhau.

3 Viết tỉ số giữa số phần tử của tập hợp A và số phần tử của tập hợp Ω.

Nhận xét: Tỉ số giữa số phần tử của tập hợp A và số phần tử của tập hợp Ω là $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Tỉ số này được gọi là *xác suất* của biến cố A: "Kết quả của hai lần tung đồng xu là giống nhau" trong trò chơi nói trên.

Trong trò chơi tung một đồng xu hai lần liên tiếp, đối với mỗi biến cố A ta có:

Xác suất của biến cố A, kí hiệu $P(A)$, là tỉ số giữa số các kết quả thuận lợi cho biến cố A và số phần tử của không gian mẫu Ω:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

ở đó $n(A)$, $n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của hai tập hợp A và Ω.

Ví dụ 1 Tung một đồng xu hai lần liên tiếp.

a) Viết tập hợp Ω là không gian mẫu trong trò chơi trên.

b) Xét biến cố B: "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa". Tính xác suất của biến cố B.

Giải

a) Không gian mẫu trong trò chơi trên là tập hợp

$$\Omega = \{SS; SN; NS; NN\}.$$

b) Có ba kết quả thuận lợi cho biến cố B là: SN, NS, NN, tức là $B = \{SN; NS; NN\}$.

Vì thế, xác suất của biến cố B là $\frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{4}$.

1 Tung một đồng xu hai lần liên tiếp. Xét biến cố "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp". Tính xác suất của biến cố nói trên.

II. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG TRÒ CHƠI GIEO XÚC XẮC

Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp.

4 Viết tập hợp Ω các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc sau hai lần gieo.

Nhận xét

• Khi gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp, có 36 kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc sau hai lần gieo, đó là:

(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(1 ; 5)	(1 ; 6)
(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)	(2 ; 6)
(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)	(3 ; 6)
(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4 ; 3)	(4 ; 4)	(4 ; 5)	(4 ; 6)
(5 ; 1)	(5 ; 2)	(5 ; 3)	(5 ; 4)	(5 ; 5)	(5 ; 6)
(6 ; 1)	(6 ; 2)	(6 ; 3)	(6 ; 4)	(6 ; 5)	(6 ; 6)

Tập hợp Ω các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc sau hai lần gieo là $\Omega = \{(i ; j) \mid i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, trong đó $(i ; j)$ là kết quả "Lần thứ nhất xuất hiện mặt i chấm, lần thứ hai xuất hiện mặt j chấm".

• Tập hợp Ω gọi là *không gian mẫu* trong trò chơi gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp.

5 Xét sự kiện "Tổng số chấm trong hai lần gieo xúc xắc bằng 8".

Sự kiện nói trên bao gồm những kết quả nào trong tập hợp Ω? Viết tập hợp C các kết quả đó.

Nhận xét

• Tập hợp C các kết quả có thể xảy ra đối với sự kiện trên là:

$$C = \{(2 ; 6); (3 ; 5); (4 ; 4); (5 ; 3); (6 ; 2)\}.$$

Ta thấy $C \subset \Omega$. Tập hợp C cũng gọi là *biến cố ngẫu nhiên* (hay gọi tắt là *biến cố*) trong trò chơi nói trên. Khi đó, sự kiện đã nêu chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp C.

• Mỗi phần tử của tập hợp C được gọi là một *kết quả thuận lợi* cho biến cố C: "Tổng số chấm trong hai lần gieo xúc xắc bằng 8".

6 Viết tỉ số giữa số phần tử của tập hợp C và số phần tử của tập hợp Ω.

Nhận xét: Tỉ số giữa số phần tử của tập hợp C và số phần tử của tập hợp Ω là $\frac{5}{36}$. Tỉ số này được gọi là *xác suất* của biến cố C: "Tổng số chấm trong hai lần gieo xúc xắc bằng 8" trong trò chơi nói trên.

Trong trò chơi gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp, đối với mỗi biến cố C ta có:

Xác suất của biến cố C, kí hiệu $P(C)$, là tỉ số giữa số các kết quả thuận lợi cho biến cố C và số phần tử của không gian mẫu Ω:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)},$$

ở đó $n(C)$, $n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của hai tập hợp C và Ω.

Ví dụ 2 Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp.

a) Viết tập hợp Ω là không gian mẫu trong trò chơi trên.

b) Xét biến cố D: "Số chấm trong hai lần gieo đều là số lẻ". Tính xác suất của biến cố D.

Giải

a) Không gian mẫu trong trò chơi trên là tập hợp

$$\Omega = \{(i ; j) \mid i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

trong đó $(i ; j)$ là kết quả "Lần đầu xuất hiện mặt i chấm, lần sau xuất hiện mặt j chấm". Tập hợp Ω có 36 phần tử.

b) Có 9 kết quả thuận lợi cho biến cố D là: $(1 ; 1)$; $(1 ; 3)$; $(1 ; 5)$; $(3 ; 1)$; $(3 ; 3)$; $(3 ; 5)$; $(5 ; 1)$; $(5 ; 3)$; $(5 ; 5)$, tức là $D = \{(1 ; 1); (1 ; 3); (1 ; 5); (3 ; 1); (3 ; 3); (3 ; 5); (5 ; 1); (5 ; 3); (5 ; 5)\}$. Tập hợp D có 9 phần tử.

Vậy xác suất của biến cố nói trên là: $\dfrac{n(D)}{n(\Omega)} = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$.

2 Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp. Xét biến cố "Số chấm trong hai lần gieo đều là số nguyên tố". Tính xác suất của biến cố đó.

BÀI TẬP

1. Tung một đồng xu hai lần liên tiếp. Tính xác suất của biến cố "Kết quả của hai lần tung là khác nhau".

2. Tung một đồng xu ba lần liên tiếp.

a) Viết tập hợp Ω là không gian mẫu trong trò chơi trên.

b) Xác định mỗi biến cố:

A: "Lần đầu xuất hiện mặt ngửa";

B: "Mặt ngửa xảy ra đúng một lần".

3. Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp.

a) Tìm số phần tử của tập hợp Ω là không gian mẫu trong trò chơi trên.

b) Phát biểu mỗi biến cố sau dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện:

$A = \{(6 ; 1); (6 ; 2); (6 ; 3); (6 ; 4); (6 ; 5); (6 ; 6)\}$;

$B = \{(1 ; 6); (2 ; 5); (3 ; 4); (4 ; 3); (5 ; 2); (6 ; 1)\}$;

$C = \{(1 ; 1); (2 ; 2); (3 ; 3); (4 ; 4); (5 ; 5); (6 ; 6)\}$.

4. Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo không bé hơn 10";

b) "Mặt 6 chấm xuất hiện ít nhất một lần".

§5 XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp. Xét biến cố: "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt 6 chấm".

Làm thế nào để tính được xác suất của biến cố nói trên?

Sáu mặt của xúc xắc

I. MỘT SỐ KHÁI NIỆM VỀ XÁC SUẤT

1. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

1 Đọc kĩ những nội dung sau:

• Một trong những khái niệm cơ bản của lí thuyết xác suất là *phép thử*. Chẳng hạn, tung đồng xu hay gieo xúc xắc, ... là những ví dụ về phép thử.

• Trong toán học phổ thông, ta chỉ xét những phép thử có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó và tập hợp này là tập hữu hạn. Chẳng hạn, khi tung một đồng xu, ta biết được mặt xuất hiện của đồng xu là sấp hoặc ngửa.

> Có những phép thử mà ta không thể đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó. Những phép thử như thế gọi là *phép thử ngẫu nhiên* (gọi tắt là phép thử).

2 Xét phép thử "Gieo một xúc xắc một lần", kết quả có thể xảy ra của phép thử là số chấm trên mặt xuất hiện của xúc xắc. Viết tập hợp Ω các kết quả có thể xảy ra của phép thử trên.

Nhận xét

• Tập hợp Ω các kết quả có thể xảy ra của phép thử trên là $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

• Tập hợp Ω gọi là *không gian mẫu* của phép thử.

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

> Tập hợp Ω các kết quả có thể xảy ra của một phép thử gọi là *không gian mẫu* của phép thử đó.

Ví dụ 1 Một hộp có 3 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ từ trong hộp, ghi lại số của thẻ được rút ra và bỏ lại thẻ đó vào hộp. Xét phép thử "Rút ngẫu nhiên liên tiếp hai chiếc thẻ trong hộp". Hãy cho biết không gian mẫu của phép thử đó.

Giải

Không gian mẫu của phép thử trên là tập hợp $\Omega = \{(1 ; 1); (1 ; 2); (1 ; 3); (2 ; 1); (2 ; 2); (2 ; 3); (3 ; 1); (3 ; 2); (3 ; 3)\}$, ở đó, chẳng hạn (1 ; 2) là kết quả "Lần thứ nhất rút ra thẻ ghi số 1, lần thứ hai rút ra thẻ ghi số 2".

Ví dụ 2 Một hộp có 1 quả bóng xanh, 1 quả bóng đỏ, 1 quả bóng vàng; các quả bóng có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ trong hộp, ghi lại màu của quả bóng được lấy ra và bỏ lại quả bóng đó vào hộp. Xét phép thử "Lấy ngẫu nhiên liên tiếp hai quả bóng trong hộp". Hãy cho biết không gian mẫu của phép thử đó.

Giải

Không gian mẫu của phép thử trên là tập hợp Ω = {XX; XĐ; XV; ĐĐ; ĐV; ĐX; VV; VX; VĐ}, ở đó, chẳng hạn XĐ là kết quả "Lần thứ nhất lấy ra quả bóng xanh, lần thứ hai lấy ra quả bóng đỏ".

2. Biến cố

a) Định nghĩa

3 Xét phép thử T: "Tung một đồng xu hai lần liên tiếp".

Không gian mẫu của phép thử trên là tập hợp Ω = {SS; SN; NS; NN}.

a) Sự kiện "Kết quả của hai lần tung là giống nhau" tương ứng với tập con A nào của tập hợp Ω?

b) Phát biểu tập con B = {SN; NS} của không gian mẫu Ω dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện.

Nhận xét

• Mỗi sự kiện liên quan đến phép thử T tương ứng với một (và chỉ một) tập con A của không gian mẫu Ω.

• Ngược lại, mỗi tập con A của không gian mẫu Ω có thể phát biểu dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện liên quan đến phép thử T.

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Biến cố ngẫu nhiên (gọi tắt là *biến cố*) là một tập con của không gian mẫu.

Chú ý: Vì sự kiện chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của một biến cố nên ta cũng gọi sự kiện là biến cố. Chẳng hạn: Sự kiện "Kết quả của hai lần tung là giống nhau" trong phép thử "Tung một đồng xu hai lần liên tiếp" là một biến cố.

Ví dụ 3 Xét phép thử "Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp".

a) Sự kiện "Tổng số chấm trong hai lần gieo chia hết cho 5" tương ứng với biến cố nào của phép thử trên?

b) Phát biểu biến cố

$D = \{(1 ; 5); (5 ; 1); (2 ; 4); (4 ; 2); (3 ; 3); (6 ; 6)\}$

của không gian mẫu (của phép thử trên) dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện.

Giải

a) Sự kiện "Tổng số chấm trong hai lần gieo chia hết cho 5" tương ứng với biến cố:

$C = \{(1 ; 4); (4 ; 1); (2 ; 3); (3 ; 2); (4 ; 6); (6 ; 4); (5 ; 5)\}$

của phép thử trên.

b) Tập con D bao gồm tất cả các phần tử của không gian mẫu có tính chất đặc trưng là tổng hai số trong mỗi cặp chia hết cho 6. Vậy biến cố D có thể phát biểu dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện "Tổng số chấm trong hai lần gieo chia hết cho 6".

1 Xét phép thử "Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp".

a) Sự kiện "Số chấm trong lần gieo thứ hai là 6" tương ứng với biến cố nào của phép thử trên?

b) Phát biểu biến cố $E = \{(5 ; 6); (6 ; 5); (6 ; 6)\}$ của không gian mẫu (trong phép thử trên) dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện.

b) Biến cố không. Biến cố chắc chắn

Xét phép thử T với không gian mẫu Ω. Mỗi biến cố là một tập con của tập hợp Ω. Vì thế, tập rỗng $\varnothing$ cũng là một biến cố, gọi là *biến cố không thể* (gọi tắt là *biến cố không*). Còn tập hợp Ω gọi là *biến cố chắc chắn*.

Chẳng hạn, khi gieo một xúc xắc, biến cố "Mặt xuất hiện có 7 chấm" là biến cố không, còn biến cố "Mặt xuất hiện có số chấm không vượt quá 6" là biến cố chắc chắn.

c) Biến cố đối

Xét phép thử T với không gian mẫu là Ω. Giả sử A là một biến cố. Như vậy, A là tập con của tập hợp Ω. Ta xét tập con $\Omega \setminus A$ là phần bù của A trong Ω.

Tập con $\Omega \setminus A$ xác định một biến cố, gọi là *biến cố đối* của biến cố A, kí hiệu là $\overline{A}$.

Chẳng hạn, khi gieo ngẫu nhiên một xúc xắc một lần, biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số lẻ" là biến cố đối của biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chẵn".

Chú ý: Nếu biến cố A được mô tả dưới dạng mệnh đề toán học Q thì biến cố đối $\overline{A}$ được mô tả bằng mệnh đề phủ định của mệnh đề Q (tức là mệnh đề $\overline{Q}$).

3. Xác suất của biến cố

4 Xét phép thử "Tung một đồng xu hai lần liên tiếp".

Không gian mẫu của phép thử trên là tập hợp $\Omega = \{SS; SN; NS; NN\}$.

Tính xác suất của biến cố $A = \{SS; NN\}$.

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Xét phép thử chỉ có một số hữu hạn kết quả có thể xảy ra và khả năng xảy ra của từng kết quả là giống nhau. Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử đó. Khi đó, với mỗi biến cố A, ta có:

> Xác suất của biến cố A, kí hiệu là $\mathrm{P}(A)$, bằng tỉ số $\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$, ở đó $n(A)$, $n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của hai tập hợp A và Ω. Như vậy: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

Ví dụ 4 Một hộp có 5 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, 4, 5; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên đồng thời 2 chiếc thẻ từ trong hộp.

a) Gọi Ω là không gian mẫu trong trò chơi trên. Tính số phần tử của tập hợp Ω.

b) Tính xác suất của biến cố E: "Tổng các số trên hai thẻ là số lẻ".

Giải

a) Mỗi phần tử của không gian mẫu Ω là một tổ hợp chập 2 của 5 phần tử trong tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5\}$. Vì thế

$$n(\Omega) = \mathrm{C}_5^2 = \frac{5!}{2!\,.\,3!} = \frac{5\,.\,4}{2} = 10.$$

b) Biến cố E gồm các cách chọn ra hai chiếc thẻ ghi số là: 1 và 2; 1 và 4; 2 và 3; 2 và 5; 3 và 4; 4 và 5. Vì thế $n(E) = 6$. Vậy xác suất của biến cố E là

$$\mathrm{P}(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Ví dụ 5 Từ một hộp chứa 5 quả cầu trắng và 5 quả cầu đỏ; các quả cầu có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai quả cầu. Tính xác suất lấy được hai quả cầu khác màu.

Giải

Mỗi lần lấy ra đồng thời hai quả cầu cho ta một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử. Do đó, không gian mẫu Ω gồm các tổ hợp chập 2 của 10 phần tử và

$$n(\Omega) = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!\,.\,8!} = \frac{10\,.\,9}{2} = 45.$$

Xét biến cố G: "Hai quả cầu lấy ra khác màu".

Khi hai quả cầu lấy ra khác màu thì một quả cầu lấy ra có màu trắng, quả cầu còn lại có màu đỏ. Có 5 cách lấy ra một quả cầu màu trắng và cũng có 5 cách lấy ra một quả cầu màu đỏ. Theo quy tắc nhân, ta có $n(G) = 5\,.\,5 = 25$.

Vậy xác suất của biến cố G là

$$P(G) = \frac{n(G)}{n(\Omega)} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}.$$

2 Có 5 bông hoa màu trắng, 5 bông hoa màu vàng và 6 bông hoa màu đỏ. Người ta chọn ra 4 bông hoa từ các bông hoa trên.

Tính xác suất của biến cố "Bốn bông hoa chọn ra có cả ba màu".

Ví dụ 6 Một đội văn nghệ có 4 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Giáo viên phụ trách đội muốn chọn ra một đội tốp ca gồm ba bạn sao cho có cả bạn nam và bạn nữ cùng tham gia.

a) Giáo viên phụ trách đội có bao nhiêu cách chọn một đội tốp ca như vậy?

b) Tính xác suất của biến cố H: "Ba bạn chọn ra có cả nam và nữ".

Giải

a) Khi ba bạn chọn ra có cả nam và nữ thì chỉ có hai khả năng:

– Chọn ra một bạn nam và hai bạn nữ;

– Chọn ra hai bạn nam và một bạn nữ.

• *Xét khả năng thứ nhất*: Chọn ra một bạn nam và hai bạn nữ.

Có 4 cách chọn ra một bạn nam.

Mỗi lần chọn ra hai bạn nữ cho ta một tổ hợp chập 2 của 5 phần tử. Do đó, số cách chọn ra hai bạn nữ là

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!\,.\,3!} = \frac{5\,.\,4}{2} = 10.$$

Theo quy tắc nhân, ta có số cách chọn ra một bạn nam và hai bạn nữ là $4\,.\,10 = 40$.

• *Xét khả năng thứ hai*: Chọn ra hai bạn nam và một bạn nữ.

Có 5 cách chọn ra một bạn nữ.

Mỗi lần chọn ra hai bạn nam cho ta một tổ hợp chập 2 của 4 phần tử. Do đó, số cách chọn ra hai bạn nam là

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!\,.\,2!} = \frac{4\,.\,3}{2} = 6.$$

Theo quy tắc nhân, ta có số cách chọn ra hai bạn nam và một bạn nữ là $5\,.\,6 = 30$.

Theo quy tắc cộng, số cách chọn ra một đội tốp ca gồm ba bạn sao cho có cả bạn nam và bạn nữ cùng tham gia là $40 + 30 = 70$ (cách).

b) Mỗi lần chọn ra đồng thời ba bạn học sinh cho ta một tổ hợp chập 3 của 9 phần tử. Do đó, không gian mẫu Ω gồm các tổ hợp chập 3 của 9 phần tử và

$$n(\Omega) = C_9^3 = \frac{9!}{3!\,.\,6!} = \frac{9\,.\,8\,.\,7}{6} = 84.$$

Theo câu a), ta có $n(H) = 70$. Vậy xác suất của biến cố H là

$$P(H) = \frac{n(H)}{n(\Omega)} = \frac{70}{84} = \frac{5}{6}.$$

II. TÍNH CHẤT CỦA XÁC SUẤT

Xét phép thử T với không gian mẫu là Ω. Khi đó, ta có các tính chất sau:

- $P(\varnothing) = 0$; $P(\Omega) = 1$;
- $0 \le P(A) \le 1$ với mỗi biến cố A;
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ với mỗi biến cố A.

Chứng minh

- Xác suất của biến cố không là $P(\varnothing) = \dfrac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} = \dfrac{0}{n(\Omega)} = 0$;

  Xác suất của biến cố chắc chắn là $P(\Omega) = \dfrac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$.

- Do $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$ và $0 \le n(A) \le n(\Omega)$ nên $0 \le P(A) \le 1$ với mỗi biến cố A.
- Do $n(\Omega \setminus A) = n(\Omega) - n(A)$ nên xác suất của biến cố $\overline{A}$ là:

$$P(\overline{A}) = \frac{n(\Omega \setminus A)}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega) - n(A)}{n(\Omega)} = 1 - \frac{n(A)}{n(\Omega)} = 1 - P(A).$$

Ví dụ 7 Một hộp có 10 quả bóng trắng và 10 quả bóng đỏ; các quả bóng có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 9 quả bóng trong hộp. Tính xác suất để trong 9 quả bóng được lấy ra có ít nhất một quả bóng màu đỏ.

Giải

Mỗi lần lấy ra đồng thời 9 quả bóng cho ta một tổ hợp chập 9 của 20 phần tử. Do đó, không gian mẫu Ω gồm các tổ hợp chập 9 của 20 phần tử và $n(\Omega) = C_{20}^9$.

Xét biến cố K: "Trong 9 quả bóng được lấy ra có ít nhất một quả bóng màu đỏ".

Khi đó biến cố đối của biến cố K là biến cố $\overline{K}$: "Trong 9 quả bóng được lấy ra không có quả bóng màu đỏ nào", tức là cả 9 quả bóng được lấy ra có màu trắng.

3 Có 15 bông hoa màu trắng và 15 bông hoa màu vàng. Người ta chọn ra đồng thời 10 bông hoa. Tính xác suất của biến cố "Trong 10 bông hoa được chọn ra có ít nhất một bông màu trắng".

Mỗi lần lấy ra đồng thời 9 quả bóng màu trắng cho ta một tổ hợp chập 9 của 10 phần tử. Do đó $n(\overline{K}) = C_{10}^{9} = \frac{10!}{9!\,.\,1!} = 10$. Suy ra $P(\overline{K}) = \frac{n(\overline{K})}{n(\Omega)} = \frac{10}{C_{20}^{9}}$. Vậy

$$P(K) = 1 - P(\overline{K}) = 1 - \frac{10}{C_{20}^{9}}.$$

III. NGUYÊN LÍ XÁC SUẤT BÉ

Qua thực nghiệm và quan sát thực tế, người ta thấy rằng các biến cố có xác suất bé sẽ gần như không xảy ra trong phép thử. Chẳng hạn, mỗi chuyến bay đều có một xác suất rất bé bị xảy ra tai nạn. Nhưng trên thực tế, tai nạn của một chuyến bay sẽ không xảy ra. Từ đó, ta thừa nhận nguyên lí sau đây, gọi là nguyên lí xác suất bé: *Nếu một biến cố ngẫu nhiên có xác suất rất bé thì thực tế có thể cho rằng trong một phép thử biến cố đó sẽ không xảy ra.*

Tuy nhiên, một xác suất như thế nào được xem là bé phải tuỳ thuộc vào từng bài toán cụ thể. Ví dụ như xác suất để dù không mở là 0,01 (dùng cho nhảy dù) thì cũng không thể coi là bé và không thể dùng loại dù đó. Nhưng nếu xác suất để tàu về ga chậm là 0,01 thì lại có thể xem là tàu về ga đúng giờ.

BÀI TẬP

1. Một hộp có 5 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, 4, 5; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên đồng thời 2 chiếc thẻ từ trong hộp.

a) Gọi Ω là không gian mẫu trong trò chơi trên. Tính số phần tử của tập hợp Ω.

b) Tính xác suất của biến cố "Tích các số trên hai thẻ là số lẻ".

2. Một hộp có 4 tấm bìa cùng loại, mỗi tấm bìa được ghi một trong các số 1, 2, 3, 4; hai tấm bìa khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên đồng thời 3 tấm bìa từ trong hộp.

a) Tính số phần tử của không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố sau:

A: "Tổng các số trên ba tấm bìa bằng 9";

B: "Các số trên ba tấm bìa là ba số tự nhiên liên tiếp".

c) Tính $P(A)$, $P(B)$.

3. Hai bạn nam Dũng, Huy và hai bạn nữ Hoa, Thảo được xếp ngồi ngẫu nhiên vào bốn ghế xếp thành hai dãy đối diện nhau. Tính xác suất xếp được:

a) Nam, nữ ngồi đối diện nhau;

b) Nữ ngồi đối diện nhau.

4. Có 10 bông hoa màu trắng, 10 bông hoa màu vàng và 10 bông hoa màu đỏ. Người ta chọn ra 4 bông hoa từ các bông hoa trên. Tính xác suất của biến cố "Bốn bông hoa chọn ra có cả ba màu".

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

1. Bốn bạn Ánh, Bình, Cường, Hoa cùng thi vào trường trung học phổ thông chất lượng cao Bình Minh. Kết quả thi cho bởi bảng thống kê sau:

Học sinh	Điểm Toán	Điểm Ngữ văn	Điểm Tiếng Anh
Ánh	10	8	10
Bình	6	7	5
Cường	9	8	9
Hoa	8	6	9

Quy định:

- Điểm trung bình viết tắt là ĐTB và tính theo công thức:

  ĐTB = (Điểm Toán + Điểm Ngữ văn + Điểm Tiếng Anh) : 3.
- Điểm trung bình Toán viết tắt là ĐTB T và tính theo công thức:

  ĐTB T = (2 × Điểm Toán + Điểm Ngữ văn + Điểm Tiếng Anh) : 4.
- Điểm trung bình Ngữ văn viết tắt là ĐTB V và tính theo công thức:

  ĐTB V = (Điểm Toán + 2 × Điểm Ngữ văn + Điểm Tiếng Anh) : 4.
- Điểm trung bình Tiếng Anh viết tắt là ĐTB A và tính theo công thức:

  ĐTB A = (Điểm Toán + Điểm Ngữ văn + 2 × Điểm Tiếng Anh) : 4.

Cách xét tuyển như sau:

Trúng tuyển: ĐTB > 7,5;

Trúng tuyển lớp Toán: ĐTB T > 9;

Trúng tuyển lớp Văn: ĐTB V > 8;

Trúng tuyển lớp Tiếng Anh: ĐTB A > 8,5.

Hãy lập bảng kết quả theo mẫu dưới đây và xem mỗi bạn có những cơ hội nào (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Học sinh	ĐTB	ĐTB T	ĐTB V	ĐTB A	Kết quả
Ánh	?	?	?	?	?
Bình	?	?	?	?	?
Cường	?	?	?	?	?
Hoa	?	?	?	?	?

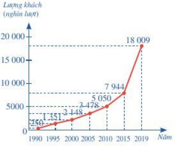
2. Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 6* cho biết lượng khách du lịch quốc tế đến Việt Nam trong một số năm (từ 1990 đến 2019).

a) Viết mẫu số liệu thống kê số lượt khách du lịch quốc tế đến Việt Nam nhận được từ biểu đồ bên.

b) Viết mẫu số liệu theo thứ tự tăng dần. Tìm số trung bình cộng, trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

c) Tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

d) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.

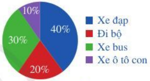


(Nguồn: https://vietnamtourism.gov.vn)
Hình 6

3. Lớp 10A có 40 học sinh. Tỉ số phần trăm về phương tiện mà các bạn đến trường được mô tả như biểu đồ ở *Hình 7*.

a) Có bao nhiêu bạn đi xe đạp đến trường?

b) Chọn ngẫu nhiên một bạn để phân công vào đội xung kích của trường. Tính xác suất của biến cố "Bạn được chọn là bạn đến trường bằng xe đạp".



Hình 7

4. Em hãy tìm hiểu chiều cao của tất cả các bạn trong tổ và lập mẫu số liệu với kết quả tăng dần. Với mẫu số liệu đó, hãy tìm

a) Số trung bình cộng, trung vị và tứ phân vị;

b) Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị;

c) Phương sai và độ lệch chuẩn.

5. Trong một hội thảo quốc tế có 10 chuyên gia đến từ các nước ở châu Á, 12 chuyên gia đến từ các nước ở châu Âu. Chọn ngẫu nhiên 2 chuyên gia vào ban tổ chức. Xác suất để chọn được 2 chuyên gia ở hai châu lục khác nhau vào ban tổ chức là bao nhiêu?

6. Trong một buổi khiêu vũ có đúng 10 cặp vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên 2 người lên khiêu vũ đầu tiên. Xác suất để 2 người được chọn là vợ chồng là bao nhiêu?

7 Một lô hàng có 20 sản phẩm bao gồm 16 chính phẩm và 4 phế phẩm. Chọn ngẫu nhiên 3 sản phẩm.

a) Có bao nhiêu kết quả xảy ra khi chọn ngẫu nhiên 3 sản phẩm?

b) Xác suất của biến cố "Cả 3 sản phẩm được chọn là chính phẩm" bằng bao nhiêu?

8. Trong một hộp có 20 chiếc thẻ được viết các số 1, 2, 3, ..., 20 sao cho mỗi thẻ chỉ viết một số và hai thẻ khác nhau viết hai số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên 2 chiếc thẻ. Tính xác suất của biến cố "Hai thẻ được chọn có tích của hai số được viết trên đó là số lẻ".

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Chủ đề 2. XÂY DỰNG MÔ HÌNH HÀM SỐ BẬC NHẤT, BẬC HAI BIỂU DIỄN SỐ LIỆU DẠNG BẢNG

I. NỘI DUNG CHÍNH CỦA CHỦ ĐỀ

1. Mô hình toán học

Những hiện tượng phổ quát trong tự nhiên, trong thực tiễn đời sống của con người được khái quát hoá, "mô hình hoá" thành những khái niệm, định lí, tính chất, ... trong toán học.

Chẳng hạn: dự báo thời tiết, những thay đổi của hệ sinh thái, quy mô dân số, xây dựng chiến lược kinh doanh, diễn biến giá cả của các mặt hàng, ... được mô hình hoá bằng các hàm số hoặc các phương trình trong toán học.

Mục đích của việc xây dựng **mô hình toán học** cho một hiện tượng phổ quát trong thực tiễn là nhằm hiểu được hiện tượng và dự báo được tiến trình diễn ra của hiện tượng đó trong tương lai.

2. Xây dựng mô hình hàm số biểu diễn số liệu thống kê

Để xây dựng mô hình toán học cho một hiện tượng xảy ra trong thực tiễn, ta sử dụng thống kê. Bằng cách xem xét hiện tượng đó ở những thời điểm khác nhau trong quá khứ, ta thu thập, tổ chức và biểu diễn được một mẫu số liệu thống kê, chẳng hạn ở bảng số liệu thống kê.

Để xây dựng mô hình toán học bằng các hàm số dựa trên mẫu số liệu thống kê, người ta làm như sau:

Bước 1. Lựa chọn cách biểu diễn dữ liệu lên mặt phẳng toạ độ

Bước 2. Căn cứ vào việc biểu diễn dữ liệu trong mặt phẳng toạ độ, lựa chọn hàm số thích hợp

Bước 3. Sử dụng hàm số đã chọn để giải thích và dự đoán hiện tượng xảy ra trong thực tiễn

Bước 4. Kiểm tra và điều chỉnh (nếu cần thiết).

Chú ý: Các mô hình dù khớp với dữ liệu cũng chỉ đưa ra một mô tả gần đúng về hiện tượng xảy ra trong thực tiễn. Vì thế việc kiểm tra và điều chỉnh mô hình là cần thiết.

Ví dụ 1 Một công ty thống kê số sản phẩm bán được mỗi năm từ năm 2017 đến năm 2020 như sau (đơn vị: triệu sản phẩm):

Năm	2017	2018	2019	2020
Doanh số (triệu sản phẩm)	14	22	28	31

Bảng 1

Bằng cách sử dụng hàm số bậc nhất, nêu mô hình toán học biểu diễn số liệu ở *Bảng 1*. Dựa theo mô hình đó, nêu dự đoán số sản phẩm bán được trong các năm 2021, 2022.

Giải

Bước 1. Lựa chọn cách biểu diễn dữ liệu lên mặt phẳng toạ độ.

Đặt $x = t - 2017$ với $t \in \{2017; 2018; 2019; 2020\}$. Ta có $x \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Từ *Bảng 1*, ta có bảng thống kê sau:

x	0	1	2	3
Số sản phẩm tương ứng với x (triệu sản phẩm)	14	22	28	31

Bảng 2

Xét các điểm $A(0 ; 14)$, $B(1 ; 22)$, $C(2 ; 28)$ và $D(3 ; 31)$ trong mặt phẳng toạ độ.

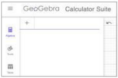
Bước 2. Xem số sản phẩm bán được $f(x)$ là hàm số của x. Ta phải chọn $f(x)$ là hàm số bậc nhất sao cho $f(x)$ dự đoán (càng chính xác càng tốt) số sản phẩm bán được ở những năm sau năm 2020, tức là tính được giá trị của $f(x)$ với $x \geq 4$.

Căn cứ vào bốn điểm $A(0 ; 14)$, $B(1 ; 22)$, $C(2 ; 28)$ và $D(3 ; 31)$, ta chọn hàm số bậc nhất $y = f(x)$ có đồ thị "gần" nhất với bốn điểm trên.

Thông thường việc tính toán trực tiếp để xác định được công thức của hàm số bậc nhất nói trên là không dễ dàng. Người ta dùng các phần mềm toán học để trợ giúp cho quá trình tính toán. Chẳng hạn, ta sử dụng phần mềm GeoGebra để xác định hàm số bậc nhất nói trên như sau:

Vào phần mềm GeoGebra, xuất hiện giao diện như *Hình 1*.

– Vẽ điểm A(0 ; 14) bằng cách dùng câu lệnh "=(0,14)" như *Hình 2*.



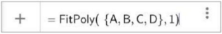
Hình 1

Hình 2

Tương tự, vẽ các điểm B(1 ; 22), C(2 ; 28) và D(3 ; 31) trong mặt phẳng toạ độ bằng cách dùng các câu lệnh: “=(1,22)”; “=(2,28)”; “=(3,31)”.

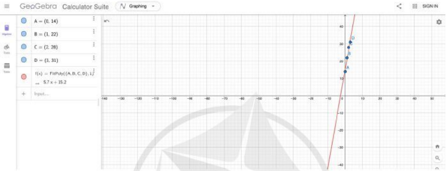
– Sử dụng câu lệnh:

“=FitPoly({A,B,C,D},1)” như *Hình 3* ta được hàm:



Hình 3

f(x) = 5,7x + 15,2 với đồ thị ở *Hình 4*.



Hình 4

Bước 3. Dựa theo mô hình hàm số bậc nhất $f(x) = 5{,}7x + 15{,}2$, ta dự đoán số sản phẩm bán được trong các năm 2021, 2022 lần lượt là:

$$f(4) = 5{,}7 \,.\, 4 + 15{,}2 = 38;$$

$$f(5) = 5{,}7 \,.\, 5 + 15{,}2 = 43{,}7 \approx 44.$$

Bước 4. Dự đoán trên là hợp lí, vì thế ta không cần điều chỉnh mô hình toán học đã chọn.

Ví dụ 2 Một công ty thống kê số sản phẩm bán được mỗi năm từ năm 2017 đến năm 2020 như sau (đơn vị: triệu sản phẩm):

Năm	2017	2018	2019	2020
Doanh số (triệu sản phẩm)	15	25	42	48

Bảng 3

a) Bằng cách sử dụng hàm số bậc hai, nêu mô hình toán học biểu diễn số liệu ở *Bảng 3*. Dựa theo mô hình đó, nêu dự đoán số sản phẩm bán được trong các năm 2021, 2022 và xác định năm bán được nhiều sản phẩm nhất.

b) Dựa theo mô hình toán học trên, công ty có nên công bố sản phẩm mới vào năm 2023 hay không? Vì sao?

Giải

a) *Bước 1.* Lựa chọn cách biểu diễn dữ liệu lên mặt phẳng toạ độ.

Đặt $x = t - 2017$ với $t \in \{2017; 2018; 2019; 2020\}$. Ta có $x \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Từ *Bảng 3*, ta có bảng thống kê sau:

x	0	1	2	3
Số sản phẩm tương ứng với x (triệu sản phẩm)	15	25	42	48

Bảng 4

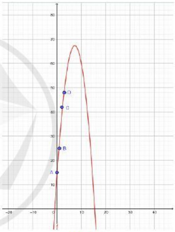
Xét các điểm $A(0 ; 15)$, $B(1 ; 25)$, $C(2 ; 42)$ và $D(3 ; 48)$ trong mặt phẳng toạ độ.

Bước 2. Xem số sản phẩm **bán được** $f(x)$ là hàm số của x. Ta phải chọn $f(x)$ là hàm số bậc hai sao cho $f(x)$ dự đoán (càng chính xác càng tốt) số sản phẩm bán được ở những năm sau năm 2020, tức là tính được giá trị của $f(x)$ với $x \geq 4$.

Căn cứ vào bốn **điểm** $A(0 ; 15)$, $B(1 ; 25)$, $C(2 ; 42)$ và $D(3 ; 48)$, ta xác định hàm số bậc hai có đồ thị "gần" nhất với bốn điểm trên.

Tương tự như trong *Ví dụ 1*. Chẳng hạn, ta sử dụng phần mềm GeoGebra để **xác định hàm số bậc hai nói trên như sau**:

– Vẽ các điểm A(0 ; 15), B(1 ; 25), C(2 ; 42) và D(3 ; 48) trong mặt phẳng toạ độ bằng cách dùng các câu lệnh: "=(0,15)"; "=(1,25)"; "=(2,42)"; "=(3,48)".



Hình 5

– Sử dụng câu lệnh "=FitPoly({A,B,C,D},2)" ta được hàm: $f(x) = -x^2 + 14{,}6x + 14{,}1$ với đồ thị ở *Hình 5*.

Bước 3. Dựa theo mô hình hàm số bậc hai $f(x) = -x^2 + 14{,}6x + 14{,}1$, ta có thể:

- Dự đoán số sản phẩm bán được trong các **năm** 2021, 2022 lần lượt là:

  $f(4) = -4^2 + 14{,}6 \,.\, 4 + 14{,}1 = 56{,}5 \approx 57$; $f(5) = -5^2 + 14{,}6 \,.\, 5 + 14{,}1 = 62{,}1 \approx 62$.

- Đồ thị hàm số bậc hai có hoành độ đỉnh là 7,3 và

  $f(7) = -7^2 + 14{,}6 \,.\, 7 + 14{,}1 = 67{,}3 \approx 67$; $f(8) = -8^2 + 14{,}6 \,.\, 8 + 14{,}1 = 66{,}9 \approx 67$.

Vậy khi $x = 7$ (tức là **năm** $2017 + 7 = 2024$) hoặc khi $x = 8$ (tức là năm $2017 + 8 = 2025$) công ty sẽ bán được nhiều sản phẩm nhất là (khoảng) 67 triệu sản phẩm.

Bước 4. Dự đoán trên là hợp lí, vì thế ta không cần điều chỉnh mô hình toán học đã chọn.

b) Dựa theo mô hình hàm số bậc hai, ta thấy số lượng sản phẩm bán được vẫn trong xu hướng tăng đến năm 2025. Vì thế, không nên thay đổi mẫu sản phẩm đó bằng mẫu sản phẩm mới. Vậy công ty không nên công bố sản phẩm mới vào **năm** 2023.

3. Ý nghĩa của xây dựng mô hình toán học

Con người nhận thức một hiện tượng xảy ra trong thực tiễn thông qua những dữ liệu thông tin thu thập **được tại hữu hạn thời điểm**. Do đó dữ liệu thu thập được thường có tính rời rạc, không đủ để phản ánh tiến trình diễn ra của hiện tượng đó theo thời gian liên tục. Việc xây dựng **mô hình toán học** cho phép chúng ta khắc phục điều đó. Nhờ vậy, chúng ta có thể hiểu được bản chất hiện tượng và dự báo **được tiến trình diễn ra của hiện tượng đó** trong tương lai.

II. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

1 Học sinh được chia theo nhóm. Mỗi nhóm lựa chọn dữ liệu (quy mô dân số của địa phương; nhiệt độ vào các tháng ở địa phương; số giờ tự học và điểm số tương ứng; nhu cầu về một loại sản phẩm; ...) và phân công thu thập dữ liệu. Sau đó mỗi nhóm điền kết quả thu thập dữ liệu vào bảng.

Sau đây là mẫu nếu lựa chọn dữ liệu là nhiệt độ vào các tháng của địa phương.

Tháng	?	?	?	?
Nhiệt độ	?	?	?	?

2 Mỗi nhóm thực hành xây dựng mô hình toán học dạng hàm số bậc nhất hoặc hàm số bậc hai để biểu diễn số liệu ở bảng thống kê theo các bước đã nêu ở mục I.2.

III. ĐÁNH GIÁ

Giáo viên tiến hành tổng kết, rút kinh nghiệm và đánh giá.

Hình thức đánh giá: Theo hình thức đánh giá của học tập dự án.

1. Đánh giá hoạt động cá nhân

- Mỗi cá nhân tự đánh giá vào phiếu cá nhân.
- Nhóm đánh giá từng thành viên trong nhóm vào phiếu đánh giá cá nhân.

2. Đánh giá hoạt động và sản phẩm của nhóm

- Nhóm tự đánh giá lại hoạt động của nhóm và cho điểm vào phiếu đánh giá hoạt động của nhóm.
- Giáo viên và các nhóm đánh giá và cho điểm phần trình bày của từng nhóm vào phiếu đánh giá hoạt động nhóm.

CHƯƠNG VII

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: toạ độ của vectơ, phương trình đường thẳng, phương trình đường tròn, phương trình ba đường conic trong mặt phẳng toạ độ.

§1 TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ

Hình 1 minh hoạ hoạt động của một màn hình ra-đa ở trạm kiểm soát không lưu của sân bay, đang theo dõi một máy bay hạ cánh. Máy bay xuất hiện trên màn hình ra-đa bởi một đốm sáng, kí hiệu là M. Dựa trên sự thay đổi của toạ độ vectơ $\overrightarrow{OM}$, trạm kiểm soát có thể xác định được đường bay của máy bay.

Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ là gì?

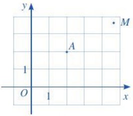
Hình 1

I. TOẠ ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM

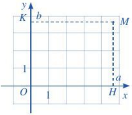
1 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy (*Hình 2*), hãy:

a) Tìm hoành độ và tung độ của điểm A.

b) Nêu cách xác định toạ độ của điểm M tuỳ ý.



Hình 2



Hình 3

Để xác định toạ độ của một điểm M tuỳ ý trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta làm như sau (*Hình 3*):

• Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với trục hoành và cắt trục hoành tại điểm H ứng với số a. Số a là hoành độ của điểm M.

• Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với trục tung và cắt trục tung tại điểm K ứng với số b. Số b là tung độ của điểm M.

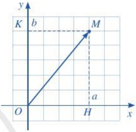
Cặp số $(a\ ;\ b)$ là toạ độ của điểm M trong mặt phẳng toạ độ Oxy. Ta kí hiệu là $M(a\ ;\ b)$.

II. TOẠ ĐỘ CỦA MỘT VECTƠ

2 Cho điểm M trong mặt phẳng toạ độ Oxy.

a) Vẽ vectơ $\overrightarrow{OM}$.

b) Nêu cách xác định toạ độ của điểm M.



Hình 4

> Toạ độ của điểm M được gọi là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.

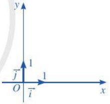
Nếu $\overrightarrow{OM}$ có toạ độ $(a\ ;\ b)$ thì ta viết $\overrightarrow{OM} = (a\ ;\ b)$, trong đó a gọi là hoành độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ và b gọi là tung độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ (*Hình 4*).

Chú ý: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta có:

• $\overrightarrow{OM} = (a\ ;\ b) \Leftrightarrow M(a\ ;\ b)$.

• Vectơ $\vec{i}$ có điểm gốc là O và có toạ độ $(1\ ;\ 0)$ gọi là *vectơ đơn vị* trên trục Ox.

Vectơ $\vec{j}$ có điểm gốc là O và có toạ độ $(0\ ;\ 1)$ gọi là *vectơ đơn vị* trên trục Oy (*Hình 5*).



Hình 5

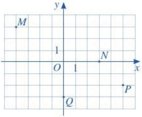
Ví dụ 1 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm M, N, P, Q (*Hình 6*). Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$.

Giải

Từ *Hình 6*, ta có: $M(-4\ ;\ 3)$, $N(3\ ;\ 0)$, $P(5\ ;\ -2)$, $Q(0\ ;\ -3)$.

Do đó: $\overrightarrow{OM} = (-4\ ;\ 3)$, $\overrightarrow{ON} = (3\ ;\ 0)$,

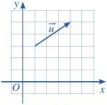
$\overrightarrow{OP} = (5\ ;\ -2)$, $\overrightarrow{OQ} = (0\ ;\ -3)$.



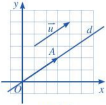
Hình 6

3 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho vectơ $\vec{u}$ (*Hình 7*). Hãy xác định điểm A sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

Để xác định điểm A, ta làm như sau (*Hình 8*):



Hình 7



Hình 8

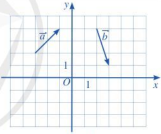
• Qua O kẻ đường thẳng d song song với giá của vectơ $\vec{u}$.

• Lấy điểm A trên đường thẳng d sao cho hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\vec{u}$ cùng hướng và độ dài đoạn thẳng OA bằng độ dài vectơ $\vec{u}$.

Nhận xét: Với mỗi vectơ $\vec{u}$, ta xác định được duy nhất một điểm A sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

> Với mỗi vectơ $\vec{u}$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy, toạ độ của vectơ $\vec{u}$ là toạ độ của điểm A sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

Nếu $\vec{u}$ có toạ độ $(a\ ;\ b)$ thì ta viết $\vec{u} = (a\ ;\ b)$, trong đó a gọi là hoành độ của vectơ $\vec{u}$ và b gọi là tung độ của vectơ $\vec{u}$.



Hình 9

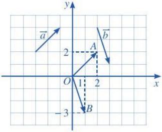
Ví dụ 2 Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ở *Hình 9*.

Giải

Trong *Hình 10*, ta có:

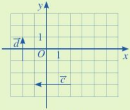
+) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ và $A(2\ ;\ 2)$; toạ độ vectơ $\overrightarrow{OA}$ chính là toạ độ điểm A nên $\vec{a} = (2\ ;\ 2)$.

+) $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ và $B(1\ ;\ -3)$; toạ độ vectơ $\overrightarrow{OB}$ chính là toạ độ điểm B nên $\vec{b} = (1\ ;\ -3)$.



Hình 10

1 Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{c}$, $\vec{d}$ trong *Hình 11*.



Hình 11

4 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho vectơ $\vec{u} = (a\ ;\ b)$. Ta chọn điểm A sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

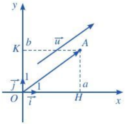
Xét vectơ đơn vị $\vec{i}$ trên trục hoành Ox và vectơ đơn vị $\vec{j}$ trên trục tung Oy (*Hình 12*).

a) Tìm hoành độ và tung độ của điểm A.

b) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OH}$ qua vectơ $\vec{i}$.

c) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OK}$ qua vectơ $\vec{j}$.

d) Chứng tỏ rằng $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$.



Hình 12

Do $(a\ ;\ b)$ là toạ độ của vectơ $\vec{u}$ nên điểm A có hoành độ là a và tung độ là b. Điểm H biểu diễn số a trên trục Ox nên $\overrightarrow{OH} = a\vec{i}$; điểm K biểu diễn số b trên trục Oy nên $\overrightarrow{OK} = b\vec{j}$. Ta có:

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} = a\vec{i} + b\vec{j}.$$

Ta có định lí sau:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, nếu $\vec{u} = (a\ ;\ b)$ thì $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$.
Ngược lại, nếu $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ thì $\vec{u} = (a\ ;\ b)$.

Chú ý: Với $\vec{a} = (x_1\ ;\ y_1)$ và $\vec{b} = (x_2\ ;\ y_2)$, ta có: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2. \end{cases}$

Như vậy, mỗi vectơ hoàn toàn được xác định khi biết toạ độ của nó.

Ví dụ 3 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(1\ ;\ 2)$ và vectơ $\vec{u} = (3\ ;\ -4)$.

a) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OA}$ qua vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

b) Biểu diễn vectơ $\vec{u}$ qua vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

Giải

a) Vì điểm A có toạ độ là $(1\ ;\ 2)$ nên $\overrightarrow{OA} = (1\ ;\ 2)$. Do đó:

$$\overrightarrow{OA} = 1\vec{i} + 2\vec{j} = \vec{i} + 2\vec{j}.$$

b) Vì $\vec{u} = (3\ ;\ -4)$ nên $\vec{u} = 3\vec{i} + (-4)\vec{j} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $B(-1\ ;\ 0)$ và vectơ $\vec{v} = (0\ ;\ -7)$.

a) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OB}$ qua vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

b) Biểu diễn vectơ $\vec{v}$ qua vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

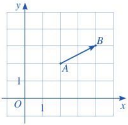
III. LIÊN HỆ GIỮA TOẠ ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ

5 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm A, B (*Hình 13*).

a) Tìm hoành độ x_A và tung độ y_A của điểm A; hoành độ x_B và tung độ y_B của điểm B.

b) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Từ đó, tìm hoành độ a và tung độ b của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

c) So sánh: $x_B - x_A$ và a; $y_B - y_A$ và b.



Hình 13

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(x_A ; y_A)$ và $B(x_B ; y_B)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A)$.

Ví dụ 4 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm $A(1 ; 1)$, $B(4 ; 3)$, $C(-1 ; -2)$ không thẳng hàng.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm toạ độ của điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4 - 1 ; 3 - 1)$. Vậy $\overrightarrow{AB} = (3 ; 2)$.

b) Gọi toạ độ của điểm D là $(x_D ; y_D)$, ta có: $\overrightarrow{DC} = (-1 - x_D ; -2 - y_D)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

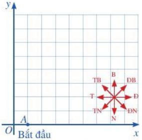
$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = (3 ; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x_D = 3 \\ -2 - y_D = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = -4. \end{cases}$$

Vậy $D(-4 ; -4)$.

3 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm:
$A(1 ; 3)$, $B(5 ; -1)$, $C(2 ; -2)$, $D(-2 ; 2)$.
Chứng minh $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Ví dụ 5 Trong một bài luyện tập của các cầu thủ bóng nước, huấn luyện viên cho các cầu thủ di chuyển theo ba đoạn liên tiếp. Đoạn thứ nhất di chuyển về hướng Đông Bắc với quãng đường là 20 m; đoạn thứ hai di chuyển về hướng Tây Bắc với quãng đường là 10 m và đoạn thứ ba di chuyển theo hướng Đông Bắc với quãng đường 5 m.

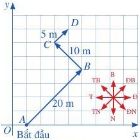
a) Vẽ các vectơ biểu diễn sự di chuyển của các cầu thủ trong hệ trục toạ độ Oxy với vị trí bắt đầu như *Hình 14*,



Hình 14

trong đó ta quy ước độ dài đường chéo của mỗi ô vuông là 5 m.

b) Tìm toạ độ của các vectơ trên.



Hình 15

Giải

a) Trong *Hình 15*, ta thấy các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ lần lượt biểu diễn sự di chuyển theo đoạn thứ nhất; đoạn thứ hai; đoạn thứ ba của các cầu thủ.

b) Do độ dài đường chéo của mỗi ô vuông là 5 m nên độ dài cạnh của mỗi ô vuông là $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ m. Dựa vào số ô vuông, ta có:

$A\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}; 0\right)$; $\quad B\left(\frac{25\sqrt{2}}{2}; 10\sqrt{2}\right)$;

$C\left(\frac{15\sqrt{2}}{2}; 15\sqrt{2}\right)$; $\quad D\left(10\sqrt{2}; \frac{35\sqrt{2}}{2}\right)$.

Do đó

$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{25\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}; 10\sqrt{2} - 0\right)$, tức là $\overrightarrow{AB} = (10\sqrt{2}; 10\sqrt{2})$;

$\overrightarrow{BC} = \left(\frac{15\sqrt{2}}{2} - \frac{25\sqrt{2}}{2}; 15\sqrt{2} - 10\sqrt{2}\right)$, tức là $\overrightarrow{BC} = (-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$;

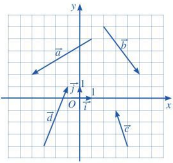
$\overrightarrow{CD} = \left(10\sqrt{2} - \frac{15\sqrt{2}}{2}; \frac{35\sqrt{2}}{2} - 15\sqrt{2}\right)$, tức là $\overrightarrow{CD} = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

BÀI TẬP

1. Tìm toạ độ của các vectơ trong *Hình 16* và biểu diễn mỗi vectơ đó qua vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

2. Tìm toạ độ của các vectơ sau:
   a) $\vec{a} = 3\vec{i}$; b) $\vec{b} = -\vec{j}$;
   c) $\vec{c} = \vec{i} - 4\vec{j}$; d) $\vec{d} = 0{,}5\vec{i} + \sqrt{6}\vec{j}$.

3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm $A(2; 3)$, $B(-1; 1)$, $C(3; -1)$.
   a) Tìm toạ độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.
   b) Tìm toạ độ trung điểm N của đoạn thẳng AC. Chứng minh $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NM}$.



Hình 16

4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $M(-1 ; 3)$.

a) Tìm toạ độ điểm A đối xứng với điểm M qua gốc O.

b) Tìm toạ độ điểm B đối xứng với điểm M qua trục Ox.

c) Tìm toạ độ điểm C đối xứng với điểm M qua trục Oy.

5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm $A(-3 ; 1)$, $B(-1 ; 3)$, $I(4 ; 2)$ không thẳng hàng. Tìm toạ độ của hai điểm C, D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nhận I làm tâm đối xứng.

6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tứ giác $ABCD$ có $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$, $C(x_C ; y_C)$, $D(x_D ; y_D)$.

Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $x_A + x_C = x_B + x_D$ và $y_A + y_C = y_B + y_D$.

7. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC. Các điểm $M(1 ; -2)$, $N(4 ; -1)$ và $P(6 ; 2)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Tìm toạ độ của các điểm A, B, C.

TÌM HIỂU THÊM

Chứng minh công thức tính toạ độ của vectơ qua toạ độ của điểm đầu và điểm cuối

Trong Mục III, ta đã phát biểu khẳng định sau:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(x_A ; y_A)$ và $B(x_B ; y_B)$. Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A \; ; \; y_B - y_A).$$

Khẳng định trên có thể chứng minh như sau:

Vì $\overrightarrow{OA} = (x_A ; y_A)$ nên $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$.

Vì $\overrightarrow{OB} = (x_B ; y_B)$ nên $\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$.

Do đó

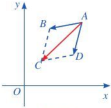
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} &= (x_B\vec{i} + y_B\vec{j}) - (x_A\vec{i} + y_A\vec{j}) = (x_B\vec{i} - x_A\vec{i}) + (y_B\vec{j} - y_A\vec{j}) \\ &= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}.\end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A)$.

§2 BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

Hai máy tời kéo tàu biển được đặt ở hai vị trí B và D dọc theo kênh đào được minh hoạ ở *Hình 17*. Hai máy tời đó kéo một con tàu từ vị trí A hướng đến vị trí C.

Kênh đào Panama
(*Nguồn: https://shutterstock.com*)



Hình 17

Làm thế nào tìm được toạ độ của vị trí C khi biết toạ độ của các vị trí A, B và D?

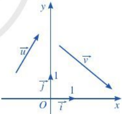
I. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTƠ, PHÉP TRỪ HAI VECTƠ, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

1 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy (*Hình 18*), cho hai vectơ $\vec{u} = (x_1 ; y_1)$ và $\vec{v} = (x_2 ; y_2)$.

a) Biểu diễn các vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ theo hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

b) Biểu diễn các vectơ $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $k\vec{u}$ $(k \in \mathbb{R})$ theo hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

c) Tìm toạ độ các vectơ $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $k\vec{u}$ $(k \in \mathbb{R})$.



Hình 18

Để biểu diễn vectơ $\vec{u} + \vec{v}$ theo hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$, ta làm như sau:

Do $\vec{u} = (x_1 ; y_1)$, $\vec{v} = (x_2 ; y_2)$ nên $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$. Vì vậy,

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = (x_1\vec{i} + x_2\vec{i}) + (y_1\vec{j} + y_2\vec{j})$$
$$= (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}.$$

Tương tự, ta có các biểu diễn sau:

$$\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j}\,;\; k\vec{u} = (kx_1)\vec{i} + (ky_1)\vec{j}\ \ (k \in \mathbb{R}).$$

Nếu $\vec{u} = (x_1 ; y_1)$ và $\vec{v} = (x_2 ; y_2)$ thì

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2 ; y_1 + y_2);$$
$$\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2 ; y_1 - y_2);$$
$$k\vec{u} = (kx_1 ; ky_1) \text{ với } k \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét: Hai vectơ $\vec{u} = (x_1 ; y_1)$, $\vec{v} = (x_2 ; y_2)$ $(\vec{v} \neq \vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi có một số thực k sao cho $x_1 = kx_2$ và $y_1 = ky_2$.

Ví dụ 1 Cho $\vec{u} = (2 ; -1)$, $\vec{v} = (1 ; 5)$. Tìm toạ độ của mỗi vectơ sau:

a) $\vec{u} + \vec{v}$; b) $\vec{u} - \vec{v}$.

Giải

Do $\vec{u} = (2 ; -1)$, $\vec{v} = (1 ; 5)$ nên ta có:

a) $\vec{u} + \vec{v} = (2 + 1 ; -1 + 5)$. Vậy $\vec{u} + \vec{v} = (3 ; 4)$.

b) $\vec{u} - \vec{v} = (2 - 1 ; -1 - 5)$. Vậy $\vec{u} - \vec{v} = (1 ; -6)$.

Ví dụ 2 Cho $\vec{a} = (-2 ; 3)$, $\vec{b} = (2 ; 1)$, $\vec{c} = (1 ; 2)$. Tính toạ độ của mỗi vectơ sau: $3\vec{a}$; $2\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}$.

Giải

Do $\vec{a} = (-2 ; 3)$, $\vec{b} = (2 ; 1)$, $\vec{c} = (1 ; 2)$ nên ta có:

+) $3\vec{a} = (3 . (-2) ; 3 . 3)$. Vậy $3\vec{a} = (-6 ; 9)$.

+) $2\vec{a} = (-4 ; 6)$.

Do đó $2\vec{a} - \vec{b} = (-4 - 2 ; 6 - 1)$, vì vậy $2\vec{a} - \vec{b} = (-6 ; 5)$.

+) $2\vec{b} = (4 ; 2)$, $\vec{a} + 2\vec{b} = (2 ; 5)$ và $-\frac{3}{2}\vec{c} = \left(-\frac{3}{2} ; -3\right)$.

Do đó $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c} = \left(\frac{1}{2} ; 2\right)$.

Ví dụ 3 Cho ba điểm $A(-1 ; -3)$, $B(2 ; 3)$ và $C(3 ; 5)$. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3 ; 6)$, $\overrightarrow{BC} = (1 ; 2)$. Suy ra $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC}$. Vậy ba điểm A, B, C thẳng hàng.

1 a) Cho $\vec{u} = (-2 ; 0)$, $\vec{v} = (0 ; 6)$, $\vec{w} = (-2 ; 3)$.

Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

b) Cho $\vec{u} = (\sqrt{3} ; 0)$, $\vec{v} = (0 ; -\sqrt{7})$.

Tìm toạ độ của vectơ $\vec{w}$ sao cho $\vec{w} + \vec{u} = \vec{v}$.

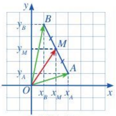
2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm $A(-1 ; 2)$, $B(2 ; 3)$, $C(-4 ; m)$. Tìm m để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

II. TOẠ ĐỘ TRUNG ĐIỂM ĐOẠN THẲNG VÀ TOẠ ĐỘ TRỌNG TÂM TAM GIÁC

2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(x_A ; y_A)$ và $B(x_B ; y_B)$. Gọi $M(x_M ; y_M)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB (minh hoạ ở *Hình 19*).

a) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$.

b) Tính toạ độ của M theo toạ độ của A và B.



Hình 19

Cho hai điểm $A(x_A ; y_A)$ và $B(x_B ; y_B)$. Nếu $M(x_M ; y_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì

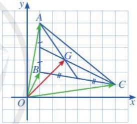
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2};\; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

3 Cho hai điểm $A(2 ; 4)$ và $M(5 ; 7)$. Tìm toạ độ điểm B sao cho M là trung điểm đoạn thẳng AB.

3 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm G (minh hoạ ở *Hình 20*).

a) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OG}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}$.

b) Tính toạ độ của G theo toạ độ của A, B, C.



Hình 20

Cho tam giác ABC có $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$, $C(x_C ; y_C)$. Nếu $G(x_G ; y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC thì

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3};\; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC có $A(-2 ; 1)$, $B(2 ; 5)$, $C(5 ; 2)$. Tìm toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB và trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải

Do $M(x_M ; y_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB nên

$$x_M = \frac{-2+2}{2} = 0;\; y_M = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Vậy $M(0 ; 3)$.

Do $G(x_G ; y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC nên $x_G = \dfrac{(-2)+2+5}{3}$; $y_G = \dfrac{1+5+2}{3}$.

Vậy $G\left(\dfrac{5}{3} ; \dfrac{8}{3}\right)$.

4 Cho ba điểm $A(-1 ; 1)$, $B(1 ; 5)$, $G(1 ; 2)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, G không thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ điểm C sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC.

III. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

4 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là các vectơ đơn vị trên Ox và Oy.

a) Tính $\vec{i}^2$; $\vec{j}^2$; $\vec{i}\,.\,\vec{j}$.

b) Cho $\vec{u} = (x_1\,;y_1)$, $\vec{v} = (x_2\,;y_2)$. Tính tích vô hướng $\vec{u}\,.\,\vec{v}$.

Để tính các tích vô hướng nói trên, ta làm như sau:

Ta có: $\vec{i}^2 = \left|\vec{i}\right|^2 = 1$; $\vec{j}^2 = \left|\vec{j}\right|^2 = 1$; $\vec{i}\,.\,\vec{j} = 0$ (vì $\vec{i} \perp \vec{j}$). Do đó

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})\,.\,(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = x_1x_2\,.\,\vec{i}^2 + x_1y_2\,.\,\vec{i}\,.\,\vec{j} + x_2y_1\,.\,\vec{j}\,.\,\vec{i} + y_1y_2\,.\,\vec{j}^2$$
$$= x_1x_2 + y_1y_2.$$

Nếu $\vec{u} = (x_1\,;y_1)$ và $\vec{v} = (x_2\,;y_2)$ thì $\vec{u}\,.\,\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Nhận xét

a) Nếu $\vec{a} = (x\,;y)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\,.\,\vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Nếu $A(x_1\,;y_1)$ và $B(x_2\,;y_2)$ thì $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

c) Với hai vectơ $\vec{u} = (x_1\,;y_1)$ và $\vec{v} = (x_2\,;y_2)$ khác $\vec{0}$, ta có:

- $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.
- $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{|\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\,.\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

Ví dụ 5 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2\,;2)$, $B(1\,;-1)$, $C(8\,;0)$.

a) Tính $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC}$ và $\cos\widehat{ABC}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

c) Giải tam giác ABC.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{BA} = (1\,;3)$, $\overrightarrow{BC} = (7\,;1)$. Do đó $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC} = 1\,.\,7 + 3\,.\,1 = 10$.

Mặt khác, ta cũng có:

$$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}, \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50},$$

$$\cos\widehat{ABC} = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\,.\,\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{10}{\sqrt{10}\,.\,\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

b) Do $\overrightarrow{AB} = (-1; -3)$ và $\overrightarrow{AC} = (6; -2)$ nên $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = (-1) . 6 + (-3) . (-2) = 0$.

Vậy $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

c) Do $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ nên $\widehat{BAC} = 90^{\circ}$, tức là tam giác ABC vuông tại A.

Mà $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ nên $\widehat{ABC} \approx 63^{\circ}$. Vì thế $\widehat{ACB} \approx 90^{\circ} - 63^{\circ} = 27^{\circ}$.

Mặt khác, ta có: $AB = \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{10}$,

$$BC = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$

$$CA = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{10}\right)^2} = 2\sqrt{10}.$$

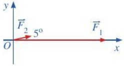
Ví dụ 6 Một chiếc xe ô tô con bị mắc kẹt trong bùn lầy. Để kéo xe ra, người ta dùng xe tải kéo bằng cách gắn một đầu dây cáp kéo xe vào đầu xe ô tô con và móc đầu còn lại vào phía sau của xe tải kéo. Khi kéo, xe tải tạo ra một lực $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn (cường độ) là 2 000 N theo phương ngang lên xe ô tô con.

Ngoài ra, có thêm một người đẩy phía sau xe ô tô con, tạo ra lực $\overrightarrow{F_2}$ có độ lớn là 300 N lên xe. Các lực này được biểu diễn bằng vectơ như *Hình 21*, sao cho $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) = 5^{\circ}$. Độ lớn lực tổng hợp tác động lên xe ô tô con là bao nhiêu Newton (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Hình 21

Giải

Chọn hệ trục toạ độ *Oxy* như *Hình 22*, mỗi đơn vị trên trục ứng với 1 N.



Hình 22

Ta có:

- $\overrightarrow{F_1} = (2\,000 ; 0)$;
- $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) = 5^{\circ}$ nên toạ độ của $\overrightarrow{F_2}$ là:

$$\overrightarrow{F_2} = (300 . \cos5^{\circ} ; 300 . \sin5^{\circ}).$$

Do đó, lực $\overrightarrow{F}$ tổng hợp các lực tác động lên xe ô tô con có toạ độ là:

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = (2\,000 + 300 . \cos5^{\circ} ; 300 . \sin5^{\circ}).$$

Độ lớn lực tổng hợp $\overrightarrow{F}$ tác động lên xe ô tô con là:

$$\left|\overrightarrow{F}\right| = \sqrt{(2\,000 + 300 . \cos5^{\circ})^2 + (300 . \sin5^{\circ})^2} \approx 2\,299 \text{ (N)}.$$

BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $\vec{a} = (-1 ; 2)$, $\vec{b} = (3 ; 1)$, $\vec{c} = (2 ; -3)$.

a) Tìm toạ độ vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$.

b) Tìm toạ độ vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x} + 2\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$.

2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $A(-2 ; 3)$, $B(4 ; 5)$, $C(2 ; -3)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

c) Giải tam giác ABC.

3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có trung điểm các cạnh BC, CA, AB tương ứng là $M(2 ; 0)$, $N(4 ; 2)$, $P(1 ; 3)$.

a) Tìm toạ độ các điểm A, B, C.

b) Trọng tâm hai tam giác ABC và MNP có trùng nhau không? Vì sao?

4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2 ; 4)$, $B(-1 ; 1)$, $C(-8; 2)$.

a) Tính $\widehat{ABC}$.

b) Tính chu vi của tam giác ABC.

c) Tìm toạ độ điểm M trên đường thẳng BC sao cho diện tích của tam giác ABC bằng hai lần diện tích của tam giác ABM.

5. Cho ba điểm $A(1 ; 1)$, $B(4 ; 3)$ và $C(6 ; -2)$.

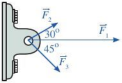
a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$ và $CD = 2AB$.

6. Chứng minh khẳng định sau:

Hai vectơ $\vec{u} = (x_1 ; y_1)$, $\vec{v} = (x_2 ; y_2)$ $(\vec{v} \neq \vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi có một số thực k sao cho $x_1 = kx_2$ và $y_1 = ky_2$.

7. Một vật đồng thời bị ba lực tác động: lực tác động thứ nhất $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn là 1 500 N, lực tác động thứ hai $\overrightarrow{F_2}$ có độ lớn là 600 N, lực tác động thứ ba $\overrightarrow{F_3}$ có độ lớn là 800 N. Các lực này được biểu diễn bằng những vectơ như *Hình 23*, với $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) = 30^\circ$, $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_3}) = 45^\circ$ và $(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}) = 75^\circ$. Tính độ lớn lực tổng hợp tác động lên vật.



Hình 23

§3 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Một máy bay cất cánh từ sân bay theo một đường thẳng nghiêng với phương nằm ngang một góc 20^o, vận tốc cất cánh là 200 km/h. *Hình 24* minh hoạ hình ảnh đường bay của máy bay trên màn hình ra-đa của bộ phận không lưu. Để xác định vị trí của máy bay tại những thời điểm quan trọng (chẳng hạn: 30 s, 60 s, 90 s, 120 s), người ta phải lập phương trình đường thẳng mô tả đường bay.

(*Nguồn: https://pixabay.com*)

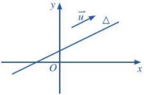
Hình 24

Làm thế nào để lập phương trình đường thẳng trong mặt phẳng toạ độ?

I. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

1 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng Δ. Vẽ vectơ $\vec{u}$ $(\vec{u} \neq \vec{0})$ có giá song song (hoặc trùng) với đường thẳng Δ (*Hình 25*).



Hình 25

Vectơ $\vec{u}$ được gọi là *vectơ chỉ phương* của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.

Nhận xét

- Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của Δ thì $k\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của Δ.
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ chỉ phương của đường thẳng đó.

2. Phương trình tham số của đường thẳng

2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a ; b)$. Xét điểm $M(x ; y)$ nằm trên Δ (*Hình 26*).

a) Nhận xét về phương của hai vectơ $\vec{u}$ và $\overrightarrow{M_0M}$.

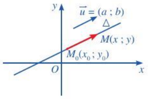
b) Chứng minh có số thực t sao cho $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$.

c) Biểu diễn toạ độ của điểm M qua toạ độ của điểm M_0 và toạ độ của vectơ chỉ phương $\vec{u}$.

Xét điểm $M(x ; y) \in \Delta$. Vì $\overrightarrow{M_0M}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên có số thực t sao cho $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$.

Do $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0 ; y - y_0)$, $\vec{u} = (a ; b)$ nên

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad \text{(I)}$$



Hình 26

Ngược lại, nếu điểm $M(x ; y)$ trong mặt phẳng toạ độ thoả mãn hệ (I) thì $M(x ; y) \in \Delta$.

Hệ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$, trong đó t là tham số, được gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0 ; y_0)$ và nhận $\vec{u} = (a ; b)$ $(\vec{u} \neq \vec{0})$ làm vectơ chỉ phương.

Nhận xét: Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (a^2 + b^2 > 0),\ t \text{ là tham số.}$$

• Với mỗi giá trị cụ thể của t, ta xác định được một điểm trên đường thẳng Δ. Ngược lại, với mỗi điểm trên đường thẳng Δ, ta xác định được một giá trị cụ thể của t.

• Vectơ $\vec{u} = (a ; b)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

Ví dụ 1

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-1 ; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(2 ; \frac{1}{2}\right)$.

b) Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = 8 - 2t \end{cases}$. Chỉ ra toạ độ một vectơ chỉ phương của Δ và một điểm thuộc đường thẳng Δ.

Giải

a) Phương trình tham số của đường thẳng Δ là:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + \dfrac{1}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ là tham số}).$$

b) Toạ độ của một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (3\,;-2)$.

Ứng với $t = 0$ ta có $\begin{cases} x = (-5) + 3 \cdot 0 = -5 \\ y = 8 - 2 \cdot 0 = 8. \end{cases}$

Điểm $B(-5\,;8)$ thuộc đường thẳng Δ.

1 Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + t. \end{cases}$$

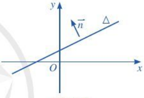
a) Chỉ ra toạ độ của hai điểm thuộc đường thẳng Δ.

b) Điểm nào trong các điểm $C(-1\,;-1)$, $D(1\,;3)$ thuộc đường thẳng Δ?

II. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng

3 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng Δ. Vẽ vectơ $\vec{n}$ ($\vec{n} \neq \vec{0}$) có giá vuông góc với đường thẳng Δ (*Hình 27*).



Hình 27

Vectơ $\vec{n}$ được gọi là *vectơ pháp tuyến* của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và giá của vectơ $\vec{n}$ vuông góc với Δ.

Nhận xét

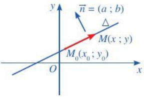
- Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của Δ thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của Δ.
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của đường thẳng đó.
- Nếu đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a\,;b)$ thì vectơ $\vec{n} = (-b\,;a)$ là một vectơ pháp tuyến của Δ.

2. Phương trình tổng quát của đường thẳng

4 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0\,;y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a\,;b)$. Xét điểm $M(x\,;y)$ nằm trên Δ (*Hình 28*).

a) Nhận xét về phương của hai vectơ $\vec{n}$ và $\overrightarrow{M_0M}$.

b) Tìm mối liên hệ giữa toạ độ của điểm M với toạ độ của điểm M_0 và toạ độ của vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.



Hình 28

Ta có: $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0 ; y - y_0)$, $\vec{n} = (a ; b)$.

Xét điểm $M(x ; y) \in \Delta$. Vì $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$ nên

$$\overrightarrow{M_0M} . \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by - ax_0 - by_0 = 0.$$

Đặt $c = -ax_0 - by_0$ ta được phương trình $ax + by + c = 0$ (II).

Ngược lại, nếu điểm $M(x ; y)$ trong mặt phẳng toạ độ thoả mãn phương trình (II) thì $M(x ; y) \in \Delta$.

Phương trình $ax + by + c = 0$ (a và b không đồng thời bằng 0) được gọi là *phương trình tổng quát* của đường thẳng.

Nhận xét

• Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ và nhận $\vec{n} = (a ; b)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0.$$

• Mỗi phương trình $ax + by + c = 0$ (a và b không đồng thời bằng 0) đều xác định một đường thẳng Δ trên mặt phẳng toạ độ nhận một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a ; b)$.

Ví dụ 2 Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-2 ; 4)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3 ; 2)$.

Giải

Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là

$$3(x + 2) + 2(y - 4) = 0$$

hay $$3x + 2y - 2 = 0.$$

2 Cho đường thẳng Δ có phương trình tổng quát là $x - y + 1 = 0$.

a) Chỉ ra toạ độ của một vectơ pháp tuyến và một vectơ chỉ phương của Δ.

b) Chỉ ra toạ độ của hai điểm thuộc Δ.

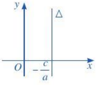
3. Những dạng đặc biệt của phương trình tổng quát

5 Cho đường thẳng Δ có phương trình tổng quát $ax + by + c = 0$ (a hoặc b khác 0). Nêu nhận xét về vị trí tương đối của đường thẳng Δ với các trục toạ độ trong mỗi trường hợp sau:

a) $b = 0$ và $a \neq 0$; b) $b \neq 0$ và $a = 0$; c) $b \neq 0$ và $a \neq 0$.

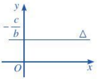
Để xét vị trí tương đối của đường thẳng Δ với các trục toạ độ, ta làm như sau:

a) Nếu $b = 0$ và $a \neq 0$ thì phương trình đường thẳng Δ trở thành $ax + c = 0$. Khi đó đường thẳng Δ song song hoặc trùng với trục Oy và cắt trục Ox tại điểm $\left(-\frac{c}{a} ; 0\right)$ (*Hình 29*).



Hình 29

b) Nếu $b \neq 0$ và $a = 0$ thì phương trình đường thẳng Δ trở thành $by + c = 0$. Khi đó đường thẳng Δ song song hoặc trùng với trục Ox và cắt trục Oy tại điểm $\left(0\,;-\dfrac{c}{b}\right)$ (*Hình 30*).

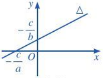


Hình 30

c) Nếu $b \neq 0$ và $a \neq 0$ thì phương trình đường thẳng Δ có thể viết thành

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Khi đó đường thẳng Δ là đồ thị hàm số bậc nhất $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ với hệ số góc là $k = -\dfrac{a}{b}$ (*Hình 31*).



Hình 31

Nhận xét

• Đường thẳng Δ có phương trình tổng quát $ax + by + c = 0$ (a hoặc b khác 0) là đồ thị hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $a \neq 0$ và $b \neq 0$.

• Phương trình trục hoành là $y = 0$, phương trình trục tung là $x = 0$.

III. LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Khi lập phương trình đường thẳng, ta thường gặp ba trường hợp như sau:

– Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm cho trước và biết vectơ pháp tuyến.

– Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm cho trước và biết vectơ chỉ phương.

– Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cho trước.

1. Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết vectơ pháp tuyến

Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0\,;y_0)$ và nhận $\vec{n} = (a\,;b)$ $(\vec{n} \neq \vec{0})$ làm vectơ pháp tuyến là $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

2. Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết vectơ chỉ phương

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0\,;y_0)$ và nhận $\vec{u} = (a\,;b)$ $(\vec{u} \neq \vec{0})$ làm vectơ chỉ phương là $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ (t là tham số).

Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng Δ ở dạng:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

3. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(x_0 ; y_0)$, $B(x_1 ; y_1)$ nên nhận vectơ $\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0 ; y_1 - y_0)$ làm vectơ chỉ phương. Do đó, phương trình tham số của đường thẳng Δ là:

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases} \quad (t \text{ là tham số}).$$

Nếu $x_1 - x_0 \neq 0$ và $y_1 - y_0 \neq 0$ thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng Δ ở dạng:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Ví dụ 3 Lập phương trình đường thẳng Δ thoả mãn mỗi điều kiện sau:

a) Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-2 ; -3)$ và có $\vec{n} = (2 ; 5)$ là vectơ pháp tuyến;

b) Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3 ; -5)$ và có $\vec{u} = (2 ; -4)$ là vectơ chỉ phương;

c) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(-3 ; 4)$ và $B(1 ; -1)$.

Giải

a) Phương trình Δ là $2(x + 2) + 5(y + 3) = 0 \Leftrightarrow 2x + 5y + 19 = 0$.

b) Phương trình Δ là $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+5}{-4} \Leftrightarrow 4x + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 1 = 0$.

c) Phương trình Δ là $\dfrac{x+3}{1-(-3)} = \dfrac{y-4}{(-1)-4} \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-4}{-5} \Leftrightarrow 5x + 4y - 1 = 0$.

Ví dụ 4 Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(a ; 0)$ và $B(0 ; b)$ với $a^2 + b^2 > 0$.

Giải

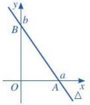
Đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B nên có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (-a ; b)$. Suy ra Δ nhận vectơ $\vec{n} = (b ; a)$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy đường thẳng Δ có phương trình tổng quát là:

$$b(x - a) + a(y - 0) = 0 \text{ hay } bx + ay - ab = 0 \qquad (1)$$

Chú ý: Trong trường hợp $ab \neq 0$, chia hai vế của phương trình (1) cho ab ta được:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (2)$$

Phương trình dạng (2) được gọi là *phương trình đường thẳng theo đoạn chắn,* đường thẳng này cắt Ox và Oy lần lượt tại $A(a ; 0)$ và $B(0 ; b)$ (*Hình 32*).



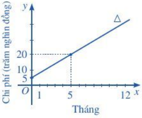
Hình 32

Ví dụ 5 Đường thẳng Δ ở *Hình 33* biểu thị tổng chi phí lắp đặt và tiền cước sử dụng dịch vụ Internet (đơn vị: trăm nghìn đồng) theo thời gian của một gia đình (đơn vị: tháng).

a) Viết phương trình của đường thẳng Δ.

b) Cho biết giao điểm của đường thẳng Δ với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa gì.

c) Tính tổng chi phí lắp đặt và sử dụng Internet trong 12 tháng đầu tiên.



Hình 33

Giải

a) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm lần lượt có toạ độ $(0 ; 5)$ và $(5 ; 20)$ nên Δ có phương trình là:

$$\frac{x-0}{5-0}=\frac{y-5}{20-5} \Leftrightarrow \frac{x}{5}=\frac{y-5}{15} \Leftrightarrow \frac{x}{1}=\frac{y-5}{3} \Leftrightarrow 3x-y+5=0 \Leftrightarrow y=3x+5.$$

b) Giao điểm của đường thẳng Δ với trục Oy ứng với $x=0$. Thời điểm $x=0$ cho biết mức phí ban đầu lắp đặt để sử dụng Internet. Khi $x=0$ thì $y=5$, vì vậy chi phí lắp đặt ban đầu là 500 000 đồng.

c) 12 tháng đầu tiên ứng với $x=12$. Do đó: $y=3 \,.\, 12+5=41$.

Vậy tổng chi phí lắp đặt và sử dụng Internet trong 12 tháng đầu tiên là 4 100 000 đồng.

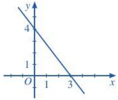
BÀI TẬP

1. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-1 ; 2)$ và

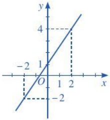
a) Có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3 ; 2)$.

b) Có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-2 ; 3)$.

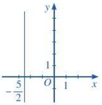
2. Lập phương trình mỗi đường thẳng trong các *Hình 34, 35, 36, 37* dưới đây:



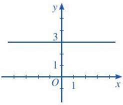
Hình 34



Hình 35



Hình 36



Hình 37

3. Cho đường thẳng d có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 2 + 2t. \end{cases}$

a) Lập phương trình tổng quát của đường thẳng d.

b) Tìm toạ độ giao điểm của đường thẳng d lần lượt với các trục Ox, Oy.

c) Đường thẳng d có đi qua điểm $M(-7 ; 5)$ hay không?

4. Cho đường thẳng d có phương trình tổng quát là: $x - 2y - 5 = 0$.

a) Lập phương trình tham số của đường thẳng d.

b) Tìm toạ độ điểm M thuộc d sao cho $OM = 5$ với O là gốc toạ độ.

c) Tìm toạ độ điểm N thuộc d sao cho khoảng cách từ N đến trục hoành Ox là 3.

5. Cho tam giác ABC, biết $A(1 ; 3)$, $B(-1 ; -1)$, $C(5 ; -3)$. Lập phương trình tổng quát của:

a) Ba đường thẳng AB, BC, AC;

b) Đường trung trực cạnh AB;

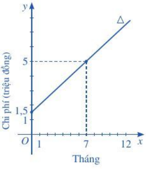
c) Đường cao AH và đường trung tuyến AM.

6. Để tham gia một phòng tập thể dục, người tập phải trả một khoản phí tham gia ban đầu và phí sử dụng phòng tập. Đường thẳng Δ ở *Hình 38* biểu thị tổng chi phí (đơn vị: triệu đồng) tham gia một phòng tập thể dục theo thời gian tập của một người (đơn vị: tháng).

a) Viết phương trình của đường thẳng Δ.

b) Cho biết giao điểm của đường thẳng Δ với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa gì.

c) Tính tổng chi phí mà người đó phải trả khi tham gia phòng tập thể dục với thời gian 12 tháng.



Hình 38

§4 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI VÀ GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Trong thực tiễn, có những tình huống đòi hỏi chúng ta phải xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng, giao điểm của hai đường thẳng, ... Chẳng hạn: Ở môn thể thao nội dung 10 m súng trường hơi di động, mục tiêu di động trên một đường thẳng b song song với mặt đất và cách mặt đất 1,4 m; viên đạn di động trên một đường thẳng a (*Hình 39*). Để trúng mục tiêu, vận động viên phải ước lượng được giao điểm M của a và b sao cho thời gian chuyển động đến điểm M của viên đạn và của mục tiêu là bằng nhau.

Hình 39

(*Nguồn: https://vietnamnet.vn*)

Làm thế nào để xác định giao điểm M của hai đường thẳng a và b?

I. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

1 Nêu vị trí tương đối của hai đường thẳng trong mặt phẳng.

Hai đường thẳng trong mặt phẳng thì cắt nhau hoặc song song hoặc trùng nhau.

2 Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$. Nêu điều kiện về hai vectơ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ trong mỗi trường hợp sau:

a) Δ_1 cắt Δ_2;   b) Δ_1 song song với Δ_2;   c) Δ_1 trùng với Δ_2.

Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$. Khi đó

a) Δ_1 cắt Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ không cùng phương.

b) Δ_1 song song với Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ cùng phương và có một điểm thuộc một đường thẳng mà không thuộc đường thẳng còn lại.

c) Δ_1 trùng với Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ cùng phương và có một điểm thuộc cả hai đường thẳng đó.

Chú ý

• Δ_1 vuông góc với Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ vuông góc với nhau.

• Khi xét vị trí tương đối của hai đường thẳng, có thể dựa vào cặp vectơ pháp tuyến của hai đường thẳng đó.

Ví dụ 1 Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau:

a) Δ_1: $2x - y + 1 = 0$ và Δ_2: $-x + 2y + 2 = 0$.

b) Δ_3: $x - y - 1 = 0$ và Δ_4: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 2t. \end{cases}$

Giải

a) Đường thẳng Δ_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (1 ; 2)$, đường thẳng Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (-2 ; -1)$.

Do $\dfrac{1}{-2} \neq \dfrac{2}{-1}$ nên $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ không cùng phương, suy ra Δ_1 cắt Δ_2.

b) Đường thẳng Δ_3, Δ_4 lần lượt có vectơ chỉ phương $\vec{u}_3 = (1 ; 1)$, $\vec{u}_4 = (2 ; 2)$. Suy ra $\vec{u}_4 = 2\vec{u}_3$. Chọn $t = 0$, ta có điểm $M(1 ; 3) \in \Delta_4$. Do $1 - 3 - 1 \neq 0$ nên $M(1 ; 3) \notin \Delta_3$.

Vậy Δ_3 song song với Δ_4.

1 Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 + t_1 \\ y = -2 + t_1 \end{cases}$ và

$\Delta_2 : \begin{cases} x = 2t_2 \\ y = -3 + 2t_2. \end{cases}$

Ta có thể xét vị trí tương đối của hai đường thẳng dựa vào số giao điểm của chúng.

Nhận xét: Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có phương trình lần lượt là

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ và } a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ (I)

Khi đó

a) Δ_1 cắt Δ_2 khi và chỉ khi hệ (I) có nghiệm duy nhất.

b) Δ_1 song song với Δ_2 khi và chỉ khi hệ (I) vô nghiệm.

c) Δ_1 trùng với Δ_2 khi và chỉ khi hệ (I) có vô số nghiệm.

Ví dụ 2 Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

Δ_1: $x - 2y + 1 = 0$ và Δ_2: $2x - 4y + 2 = 0$.

Giải

Toạ độ giao điểm của đường thẳng Δ_1 và đường thẳng Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x - 4y + 2 = 0. \end{cases}$$

Hệ trên có vô số nghiệm.

Như vậy, Δ_1 và Δ_2 có vô số điểm chung, tức là Δ_1 trùng với Δ_2.

2 Xét vị trí tương đối của đường thẳng

d: $x + 2y - 2 = 0$

với mỗi đường thẳng sau:

Δ_1: $3x - 2y + 6 = 0$;

Δ_2: $x + 2y + 2 = 0$;

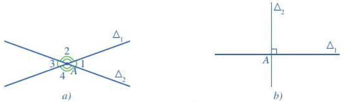
Δ_3: $2x + 4y - 4 = 0$.

II. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

3 Trong mặt phẳng, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại A tạo thành bốn góc đỉnh A.

Quan sát *Hình 40a* và đọc tên một góc nhọn trong bốn góc đó.

Quan sát *Hình 40b* và nêu đặc điểm bốn góc tại đỉnh A.



Hình 40

Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tạo thành bốn góc.

- Nếu hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 không vuông góc với nhau thì góc nhọn trong bốn góc tạo thành được gọi là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.
- Nếu hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau thì ta nói góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng 90°.

Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được kí hiệu là $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$ hoặc (Δ_1, Δ_2).

Quy ước: Khi Δ_1 song song hoặc trùng với Δ_2, ta nói góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng 0°.

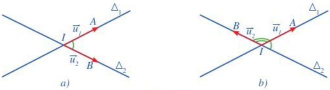
Nhận xét: Góc giữa hai đường thẳng luôn bé hơn hoặc bằng 90°, tức là $(\Delta_1, \Delta_2) \le 90^\circ$.

4 Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau tại I và có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$. Gọi A và B là các điểm lần lượt thuộc hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 sao cho

$$\vec{u}_1 = \overrightarrow{IA},\ \vec{u}_2 = \overrightarrow{IB}.$$

a) Quan sát *Hình 41a, Hình 41b,* hãy nhận xét về độ lớn của góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và độ lớn của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$.

b) Chứng tỏ $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left|\cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})\right|$.



Hình 41

Để trả lời các câu hỏi trên, ta làm như sau:

- Nếu $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) \leq 90°$ thì $(\Delta_1, \Delta_2) = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$. Do đó, $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$ và $\cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) \geq 0$.
- Nếu $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) > 90°$ thì $(\Delta_1, \Delta_2) = 180° - (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$. Do đó, $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = -\cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$ và $\cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) < 0$.

Từ hai trường hợp trên, ta suy ra $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left|\cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})\right|$.

Nhận xét: Do $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$ nên $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left|\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)\right| = \dfrac{|\vec{u}_1 . \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| . |\vec{u}_2|}$.

5 Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (a_1 ; b_1)$, $\vec{u}_2 = (a_2 ; b_2)$. Tính $\cos(\Delta_1, \Delta_2)$.

Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (a_1 ; b_1)$, $\vec{u}_2 = (a_2 ; b_2)$. Ta có:

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} . \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Nhận xét

- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$
- Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$. Ta cũng có:

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left|\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)\right| = \frac{|\vec{n}_1 . \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| . |\vec{n}_2|}.$$

Ví dụ 3 Tính số đo góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta_1: \begin{cases} x = -1 + \sqrt{3}t_1 \\ y = 1 + t_1 \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = -1 + \sqrt{3}t_2 \\ y = 4 - t_2; \end{cases}$

b) $\Delta_1: 3x + y - 10 = 0$ và $\Delta_2: -2x + y - 7 = 0.$

Giải

a) Δ_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (\sqrt{3} ; 1)$.

Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (\sqrt{3} ; -1)$.

3 Tính số đo góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta_1: \begin{cases} x = -3 + 3\sqrt{3}t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ và $\Delta_2: y - 4 = 0;$

b) $\Delta_1: 2x - y = 0$ và $\Delta_2: -x + 3y - 5 = 0.$

Do đó, ta có: $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{|\sqrt{3}.\sqrt{3} + 1.(-1)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}.\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $(\Delta_1, \Delta_2) = 60^{\circ}$.

b) Δ_1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n_1} = (3 ; 1)$, Δ_2 có vectơ pháp tuyến $\vec{n_2} = (-2 ; 1)$. Do đó, ta có:

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{n_1}, \vec{n_2})| = \frac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|.|\vec{n_2}|} = \frac{|3.(-2) + 1.1|}{\sqrt{3^2 + 1^2}.\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $(\Delta_1, \Delta_2) = 45^{\circ}$.

III. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

6 Trong mặt phẳng toạ độ, cho đường thẳng Δ: $2x + y - 4 = 0$ và điểm $M(-1 ; 1)$. Gọi H là hình chiếu của M lên đường thẳng Δ.

a) Tìm vectơ chỉ phương của đường thẳng MH.

b) Viết phương trình tham số của đường thẳng MH.

c) Tìm toạ độ của H. Từ đó, tính độ dài đoạn thẳng MH.

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 > 0)$ và điểm $M(x_0 ; y_0)$. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ, kí hiệu là $d(M, \Delta)$, được tính bởi công thức sau:

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Chú ý: Nếu $M \in \Delta$ thì $d(M, \Delta) = 0$.

Ví dụ 4 Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a) $M(-2 ; 1)$ và Δ: $2x - 3y + 5 = 0$.

b) $M(1 ; -3)$ và Δ: $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2 - 4t. \end{cases}$

Giải

a) Ta có:

$$d(M, \Delta) = \frac{|2.(-2) - 3.1 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

4

a) Tính khoảng cách từ điểm $O(0 ; 0)$ đến đường thẳng Δ:

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1.$$

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song Δ_1: $x - y + 1 = 0$ và Δ_2: $x - y - 1 = 0$.

b) Đường thẳng Δ đi qua điểm $N(-2 ; 2)$, có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4 ; 3)$.

Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là

$$4(x+2) + 3(y-2) = 0 \text{ hay } 4x + 3y + 2 = 0.$$

Vậy $d(M, \Delta) = \dfrac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{3}{5}$.

BÀI TẬP

1. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau:

a) $d_1: 3x + 2y - 5 = 0$ và $d_2: x - 4y + 1 = 0$;

b) $d_3: x - 2y + 3 = 0$ và $d_4: -2x + 4y + 10 = 0$;

c) $d_5: 4x + 2y - 3 = 0$ và $d_6: \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} + t \\ y = \dfrac{5}{2} - 2t. \end{cases}$

2. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng $d_1: 2x - y + 5 = 0$ và $d_2: x - 3y + 3 = 0$.

3. Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng trong mỗi trường hợp sau:

a) $A(1 ; -2)$ và $\Delta_1: 3x - y + 4 = 0$;

b) $B(-3 ; 2)$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - 2t. \end{cases}$

4. Với giá trị nào của tham số m thì hai đường thẳng sau đây vuông góc?

$$\Delta_1: mx - y + 1 = 0 \text{ và } \Delta_2: 2x - y + 3 = 0.$$

5. Cho ba điểm $A(2 ; -1)$, $B(1 ; 2)$ và $C(4 ; -2)$. Tính số đo góc BAC và góc giữa hai đường thẳng AB, AC.

6. Cho ba điểm $A(2 ; 4)$, $B(-1 ; 2)$ và $C(3 ; -1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua B đồng thời cách đều A và C.

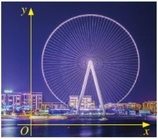
7. Có hai con tàu A và B cùng xuất phát từ hai bến, chuyển động đều theo đường thẳng ngoài biển. Trên màn hình ra-đa của trạm điều khiển (được coi như mặt phẳng toạ độ Oxy với đơn vị trên các trục tính theo ki-lô-mét), tại thời điểm t (giờ), vị trí của tàu A có toạ độ được xác định bởi công thức $\begin{cases} x = 3 - 33t \\ y = -4 + 25t \end{cases}$, vị trí của tàu B có toạ độ là $(4 - 30t; 3 - 40t)$.

a) Tính côsin góc giữa hai đường đi của hai tàu A và B.

b) Sau bao lâu kể từ thời điểm xuất phát hai tàu gần nhau nhất?

c) Nếu tàu A đứng yên ở vị trí ban đầu, tàu B chạy thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai tàu bằng bao nhiêu?

§5 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN



Hình 42
(*Nguồn: https://pixabay.com*)

Ở một số công viên, người ta dựng vòng quay có bán kính rất lớn đặt theo phương thẳng đứng như *Hình 42*. Khi vòng quay hoạt động, một người ngồi trong cabin sẽ chuyển động theo đường tròn.

Làm thế nào để xác định được phương trình quỹ đạo chuyển động của người đó?

I. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

1. Phương trình đường tròn

1

a) Tính khoảng cách từ gốc toạ độ $O(0\,;0)$ đến điểm $M(3\,;4)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy.

b) Cho hai điểm $I(a\,;b)$ và $M(x\,;y)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy. Nêu công thức tính độ dài đoạn thẳng IM.

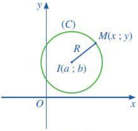
Nhận xét: Với hai điểm $I(a\,;b)$ và $M(x\,;y)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta có:

$$IM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, nêu mối liên hệ giữa x và y để:

a) Điểm $M(x\,;y)$ nằm trên đường tròn tâm $O(0\,;0)$ bán kính 5.

b) Điểm $M(x\,;y)$ nằm trên đường tròn (C) tâm $I(a\,;b)$ bán kính R.



Hình 43

Điểm $M(x\,;y)$ nằm trên đường tròn (C) khi và chỉ khi

$IM = R \Leftrightarrow IM^2 = R^2$

$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ (*Hình 43*).

Phương trình đường tròn tâm $I(a ; b)$ bán kính R là

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Phương trình đường tròn ở dạng trên thường được gọi là *phương trình chính tắc của đường tròn.*

Ví dụ 1 Lập phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Đường tròn tâm O bán kính R;

b) Đường tròn tâm $I(-1 ; 3)$ bán kính 7.

Giải

a) Phương trình đường tròn tâm O bán kính R là

$$(x-0)^2+(y-0)^2=R^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=R^2.$$

b) Phương trình đường tròn tâm $I(-1 ; 3)$ bán kính 7 là

$$[x-(-1)]^2+(y-3)^2=7^2 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=49.$$

Ví dụ 2 Tìm tâm và bán kính của đường tròn có phương trình là

$$(x+2)^2+(y-5)^2=9.$$

Giải

Ta có: $(x+2)^2+(y-5)^2=9$

$\Leftrightarrow [x-(-2)]^2+(y-5)^2=3^2.$

Vậy đường tròn đã cho có tâm là $I(-2 ; 5)$ bán kính $R=3$.

1 Viết phương trình đường tròn tâm $I(6 ; -4)$ đi qua điểm $A(8 ; -7)$.

3 Viết phương trình đường tròn (C):

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \text{ về dạng } x^2+y^2-2ax-2by+c=0.$$

Nhận xét: Ta có thể viết phương trình $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ của đường tròn tâm $I(a ; b)$ bán kính R về phương trình có dạng là $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. Dạng đó thường được gọi là *phương trình tổng quát của đường tròn.*

Ví dụ 3

a) Phương trình $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ có phải là phương trình đường tròn không? Nếu phải, xác định toạ độ tâm và bán kính của đường tròn đó.

b) Xác định điều kiện của a, b, c để phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình đường tròn. Khi đó, xác định toạ độ tâm và bán kính theo a, b, c.

Giải

a) Ta có:

$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 9 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 3^2.$

Phương trình trên là phương trình đường tròn tâm $I(2 ; -1)$ bán kính $R = 3$.

b) Ta có:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2ax + a^2) + (y^2 - 2by + b^2) = a^2 + b^2 - c$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c.$$

Do đó, phương trình trên là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2 + b^2 > c$. Lúc này đường tròn đã cho có tâm $I(a ; b)$ bán kính

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}.$$

2 Tìm k sao cho phương trình:
$x^2 + y^2 + 2kx + 4y + 6k + 3 = 0$
là phương trình đường tròn.

2. Phương trình đường tròn đi qua ba điểm không thẳng hàng

Do có duy nhất một đường tròn đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước nên ta có thể lập được phương trình đường tròn đó khi biết toạ độ của ba điểm nói trên.

Ví dụ 4 Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm

$$A(-1 ; 1), B(0 ; -2), C(0 ; 2).$$

Giải

Giả sử tâm của đường tròn là điểm $I(a ; b)$. Ta có $IA = IB = IC \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 = IC^2$.

Vì $IA^2 = IB^2$, $IB^2 = IC^2$ nên

$$\begin{cases}(-1-a)^2 + (1-b)^2 = (0-a)^2 + (-2-b)^2 \\ (0-a)^2 + (-2-b)^2 = (0-a)^2 + (2-b)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a^2 + b^2 + 2a - 2b + 2 = a^2 + b^2 + 4b + 4 \\ a^2 + b^2 + 4b + 4 = a^2 + b^2 - 4b + 4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2a - 2b = 4b + 2 \\ b = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 1 \\ b = 0.\end{cases}$$

3 Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(1 ; 2)$, $B(5 ; 2)$, $C(1 ; -3)$.

Đường tròn tâm $I(1 ; 0)$ bán kính $R = IC = \sqrt{a^2 + b^2 - 4b + 4} = \sqrt{5}$.

Phương trình đường tròn là $(x-1)^2 + (y-0)^2 = (\sqrt{5})^2$.

Vậy phương trình đường tròn là $(x-1)^2 + y^2 = 5$.

II. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

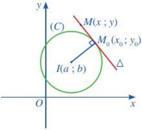
4 Cho điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ nằm trên đường tròn (C) tâm $I(a ; b)$ bán kính R.

Gọi Δ là tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ thuộc đường tròn (*Hình 44*).

a) Chứng tỏ rằng $\overrightarrow{IM_0}$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ.

b) Tính toạ độ của $\overrightarrow{IM_0}$.

c) Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ.



Hình 44

Cho đường tròn (C) tâm $I(a ; b)$ tại điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ nằm trên đường tròn đó. Gọi M_0t tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M_0(x_0 ; y_0)$. Khi đó, ta có:

- Đường thẳng M_0t đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ và có vectơ pháp tuyến
$$\overrightarrow{IM_0} = (x_0 - a ; y_0 - b).$$
- Phương trình tiếp tuyến M_0t là
$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0.$$

Ví dụ 5 Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(2 ; 1)$ thuộc đường tròn
$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5.$$

Giải

Đường tròn có tâm $I(1 ; 3)$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(2 ; 1)$ thuộc đường tròn $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$ là

$$(2 - 1)(x - 2) + (1 - 3)(y - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow 1(x - 2) - 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 0.$$

4 Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(-1 ; -4)$ thuộc đường tròn
$$(x - 3)^2 + (y + 7)^2 = 25.$$

Ví dụ 6 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, một vật chuyển động tròn đều ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn tâm $I(3 ; 2)$ bán kính 5 dưới tác dụng của lực căng dây. Khi vật chuyển động tới điểm $M(6 ; 6)$ thì dây căng bị đứt.

a) Viết phương trình quỹ đạo chuyển động của vật sau khi dây bị đứt, biết rằng vật chỉ chịu tác động của duy nhất lực căng dây trong bài toán này.

b) Một vật khác chuyển động thẳng đều trên đường thẳng có phương trình
$$\Delta: 3x + 4y + 23 = 0.$$
Chứng minh hai vật này không gặp nhau tại bất kì thời điểm nào.

Giải

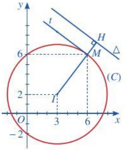
a) Quỹ đạo chuyển động của vật thứ nhất trước khi dây bị đứt là đường tròn (C) (*Hình 45*) có phương trình:

$$(x-3)^2+(y-2)^2=5^2 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=25.$$

Khi dây bị đứt, do vật thứ nhất chỉ chịu tác động của duy nhất lực căng dây nên vật đó tiếp tục chuyển động theo tiếp tuyến Mt tại điểm $M(6\,;6)$ thuộc đường tròn (C). Phương trình tiếp tuyến Mt là:

$$(6-3)(x-6)+(6-2)(y-6)=0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-6)+4(y-6)=0 \Leftrightarrow 3x+4y-42=0.$$



Hình 45

Vậy quỹ đạo chuyển động của vật thứ nhất sau khi dây bị đứt là tia Mt, đường thẳng Mt có phương trình là: $3x+4y-42=0$.

b) Khoảng cách từ tâm đường tròn (C) đến đường thẳng Δ: $3x+4y+23=0$ là:

$$IH=\frac{|3\,.\,3+4\,.\,2+23|}{\sqrt{3^2+4^2}}=8>5.$$

Vì khoảng cách từ tâm đường tròn (C) đến đường thẳng Δ lớn hơn bán kính của đường tròn (C) nên đường tròn (C) và đường thẳng Δ không có điểm chung, tức là vật thứ hai không gặp vật thứ nhất khi dây chưa đứt. Mặt khác, vì Δ // Mt nên vật thứ hai không gặp vật thứ nhất sau khi dây bị đứt. Vậy hai vật không bao giờ gặp nhau.

BÀI TẬP

1. Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn?

a) $x^2+y^2-2x+2y-7=0$;

b) $x^2+y^2-8x+2y+20=0$.

2. Tìm tâm và bán kính của đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Đường tròn có phương trình $(x+1)^2+(y-5)^2=9$;

b) Đường tròn có phương trình $x^2+y^2-6x-2y-15=0$.

3. Lập phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Đường tròn có tâm $I(-3\,;4)$ bán kính $R=9$;

b) Đường tròn có tâm $I(5\,;-2)$ và đi qua điểm $M(4\,;-1)$;

c) Đường tròn có tâm $I(1\,;-1)$ và có một tiếp tuyến là Δ: $5x-12y-1=0$;

d) Đường tròn đường kính AB với $A(3\,;-4)$ và $B(-1\,;6)$;

e) Đường tròn đi qua ba điểm $A(1\,;1)$, $B(3\,;1)$, $C(0\,;4)$.

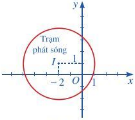
4. Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 3 thuộc đường tròn

$$(x+2)^2+(y+7)^2=169.$$

5. Tìm m sao cho đường thẳng $3x+4y+m=0$ tiếp xúc với đường tròn

$$(x+1)^2+(y-2)^2=4.$$

6. *Hình 46* mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí I có toạ độ $(-2 ; 1)$ trong mặt phẳng toạ độ (đơn vị trên hai trục là ki-lô-mét).



Hình 46

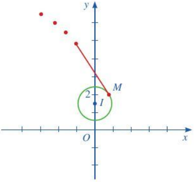
a) Lập phương trình đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng, biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng 3 km.

b) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có toạ độ $(-1 ; 3)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không? Giải thích.

c) Tính theo đường chim bay, xác định khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí có toạ độ $(-3 ; 4)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

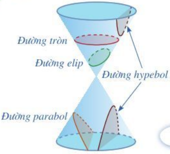
7. Ném đĩa là một môn thể thao thi đấu trong Thế vận hội Olympic mùa hè. Khi thực hiện cú ném, vận động viên thường quay lưng lại với hướng ném, sau đó xoay ngược chiều kim đồng hồ một vòng rưỡi của đường tròn để lấy đà rồi thả tay ra khỏi đĩa. Giả sử đĩa chuyển động trên một đường tròn tâm $I\left(0 ; \frac{3}{2}\right)$ bán kính 0,8 trong mặt phẳng toạ độ Oxy (đơn vị trên hai trục là mét). Đến điểm $M\left(\frac{\sqrt{39}}{10} ; 2\right)$, đĩa được ném đi (*Hình 47*). Trong những giây đầu tiên ngay sau khi được ném đi, quỹ đạo chuyển động của chiếc đĩa có phương trình như thế nào?

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)



Hình 47

§6 BA ĐƯỜNG CONIC



Hình 48

Từ xa xưa, người Hy Lạp đã biết rằng giao tuyến của mặt nón tròn xoay và một mặt phẳng không đi qua đỉnh của mặt nón là đường tròn hoặc đường cong mà ta gọi là đường conic (*Hình 48*). Từ "đường conic" xuất phát từ gốc tiếng Hy Lạp *konos*, nghĩa là mặt nón.

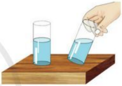
Đường conic gồm những loại đường nào và được xác định như thế nào?

I. ĐƯỜNG ELIP

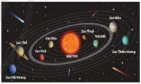
1. Định nghĩa đường elip

Đường elip là một đường quen thuộc với chúng ta và thường gặp trong thực tế, chẳng hạn:

– Quan sát một cốc thuỷ tinh hình trụ có chứa nước màu: Nếu đặt đứng cốc nước trên mặt bàn nằm ngang thì mặt thoáng của nước trong cốc là một hình tròn, giới hạn bởi một đường tròn. Nếu ta nghiêng cốc nước đi thì mặt thoáng của nước được giới hạn bởi một đường elip (*Hình 49*).

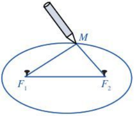

Hình 49

– Nhà thiên văn học người Đức là Johannes Kepler (1571 – 1630) đã chứng tỏ rằng: Mỗi hành tinh trong Hệ Mặt Trời đều chuyển động theo quỹ đạo là một đường elip (*Hình 50*).


Hình 50

1 Đóng hai chiếc đinh cố định tại hai điểm F_1, F_2 trên mặt một bảng gỗ. Lấy một vòng dây kín không đàn hồi có độ dài lớn hơn $2F_1F_2$. Quàng vòng dây đó qua hai chiếc đinh và kéo căng tại vị trí của đầu bút chì (*Hình 51*). Di chuyển đầu bút chì sao cho dây luôn căng, đầu bút chì vạch nên một đường mà ta gọi là *đường elip*. Gọi vị trí của đầu bút chì là điểm M.

Khi M thay đổi, có nhận xét gì về tổng độ dài $MF_1 + MF_2$?



Hình 51

Khi M thay đổi, tổng $MF_1 + MF_2$ là một độ dài không đổi.

Cho hai điểm F_1, F_2 cố định có khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$.

Đường elip (còn gọi là elip) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$, trong đó a là số cho trước lớn hơn c.

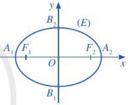
Hai điểm F_1 và F_2 được gọi là hai tiêu điểm của elip.

2. Phương trình chính tắc của elip

Thông thường ta thiết lập phương trình của một đường (thẳng hoặc cong) trong mặt phẳng toạ độ theo hệ trục toạ độ Oxy cho trước. Tuy nhiên, đối với đường elip, nếu làm như vậy thì phương trình thu được có thể sẽ phức tạp, không thuận tiện trong vận dụng. Vì vậy, khi lập phương trình của đường elip trên mặt phẳng, trước tiên ta sẽ chọn hệ trục toạ độ Oxy thuận tiện nhất.

2 Trong mặt phẳng, xét đường elip (E) là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$, ở đó $F_1F_2 = 2c$ (với $a > c > 0$).

Ta chọn hệ trục toạ độ Oxy có gốc là trung điểm của F_1F_2, trục Oy là đường trung trực của F_1F_2 và F_2 nằm trên tia Ox (*Hình* 52). Khi đó, $F_1(-c\ ;0)$ và $F_2(c\ ;0)$ là hai tiêu điểm của elip (E). Chứng minh rằng:



Hình 52

a) $A_1(-a\ ;0)$ và $A_2(a\ ;0)$ đều là giao điểm của elip (E) với trục Ox.

b) $B_1(0\ ;-b)$ và $B_2(0\ ;b)$, ở đó $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, đều là giao điểm của elip (E) với trục Oy.

Để chứng minh các khẳng định trên, ta làm như sau:

a) Do $A_1F_1 = a - c$ và $A_1F_2 = a + c$ nên $A_1F_1 + A_1F_2 = 2a$. Vậy $A_1(-a\ ;0)$ thuộc elip (E). Mà $A_1(-a\ ;0)$ thuộc trục Ox nên $A_1(-a\ ;0)$ là giao điểm của elip (E) với trục Ox. Tương tự, ta chứng minh được $A_2(a\ ;0)$ là giao điểm của elip (E) với trục Ox.

b) Ta có:

$$B_2F_2 = \sqrt{(c-0)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{c^2 + b^2} = \sqrt{a^2} = a.$$

Vì $B_2F_1 = B_2F_2$ nên $B_2F_1 + B_2F_2 = a + a = 2a$. Do đó, $B_2(0\ ;b)$ thuộc elip (E). Mà $B_2(0\ ;b)$ thuộc trục Oy nên $B_2(0\ ;b)$ là giao điểm của elip (E) với trục Oy.

Tương tự, ta chứng minh được: $B_1(0\ ;-b)$ là giao điểm của elip (E) với trục Oy.

Như vậy, elip (E) đi qua bốn điểm $A_1(-a\ ;0)$, $A_2(a\ ;0)$, $B_1(0\ ;-b)$, $B_2(0\ ;b)$, với $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Ta chứng minh được rằng:

Khi chọn hệ trục toạ độ như trên, phương trình đường elip có thể viết dưới dạng

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \text{trong đó } a>b>0.$$

Đây gọi là *phương trình chính tắc của elip*.

Chú ý

Đối với elip (E) có phương trình chính tắc như đã nêu ở trên, ta có:

- $c^2=a^2-b^2$, ở đó $2c=F_1F_2$.
- Nếu điểm $M(x\,;y)$ thuộc elip (E) thì $-a\le x\le a$.

Ví dụ 1 Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường elip?

a) $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$; b) $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=-1$; c) $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$; d) $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$.

Giải

Phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$ nên chỉ có trường hợp d) là phương trình chính tắc của đường elip.

Ví dụ 2 Lập phương trình chính tắc của elip (E) có một tiêu điểm là $F_2(5\,;0)$ và đi qua điểm $M(0\,;3)$.

Giải

Elip (E) có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

Do $F_2(5\,;0)$ là một tiêu điểm của (E) nên $c=5$. Điểm $M(0\,;3)$ nằm trên (E) nên $\frac{0^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1$. Do đó $b^2=9$, suy ra $a^2=b^2+c^2=9+25=34$.

Vậy elip (E) có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{9}=1.$$

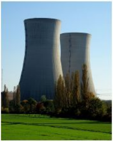
1 Lập phương trình chính tắc của elip (E) đi qua hai điểm $M(0\,;3)$ và $N\left(3\,;-\frac{12}{5}\right)$.

II. ĐƯỜNG HYPEBOL

Đường hypebol là một đường quen thuộc với chúng ta và thường gặp trong thực tế, chẳng hạn:

Mặt cắt đứng của một tháp cảng được thiết kế có dạng hypebol. Dạng thiết kế đó đòi hỏi ít vật liệu xây dựng hơn so với những dạng hình khác.

(*Nguồn: https://flickr.com*)

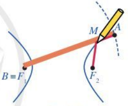


Mặt cắt đứng của ống khói nhà máy điện hạt nhân được thiết kế có dạng hypebol.

(*Nguồn: https://pixabay.com*)

1. Định nghĩa đường hypebol

3 Đóng hai chiếc đinh cố định tại hai điểm F_1, F_2 trên mặt một bảng gỗ. Lấy một thước thẳng có mép AB và một sợi dây không đàn hồi có chiều dài l thoả mãn $AB - F_1F_2 < l < AB$. Đính một đầu dây vào điểm A và đầu dây kia vào F_2. Đặt thước sao cho điểm B trùng với F_1 và lấy đầu bút chì (kí hiệu là M) tì sát sợi dây vào thước thẳng sao cho sợi dây luôn bị căng. Sợi dây khi đó là đường gấp khúc AMF_2.



Hình 53

Cho thước quay quanh điểm B (trùng F_1), tức là điểm A chuyển động trên đường tròn tâm B có bán kính bằng độ dài đoạn thẳng AB, mép thước luôn áp sát mặt gỗ (*Hình 53*). Khi đó, đầu bút chì M sẽ vạch nên một đường mà ta gọi là *đường hypebol*.

Khi M thay đổi, có nhận xét gì về hiệu $MF_1 - MF_2$?

Khi M thay đổi, hiệu

$MF_1 - MF_2 = (MF_1 + MA) - (MF_2 + MA) = AB - l$ không đổi.

Cho hai điểm F_1, F_2 cố định có khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$.

Đường hypebol (còn gọi là hypebol) là tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$, trong đó a là số dương cho trước nhỏ hơn c.

Hai điểm F_1 và F_2 được gọi là hai tiêu điểm của hypebol.

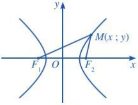
2. Phương trình chính tắc của đường hypebol

4 Để lập phương trình của đường hypebol trong mặt phẳng, trước tiên ta sẽ chọn hệ trục toạ độ Oxy thuận tiện nhất.

Tương tự elip, ta chọn trục Ox là đường thẳng F_1F_2, trục Oy là đường trung trực của đoạn thẳng $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$, gốc toạ độ O là trung điểm của đoạn thẳng F_1F_2 (*Hình 54*).

a) Tìm toạ độ của hai tiêu điểm F_1, F_2.

b) Nêu dự đoán thích hợp cho $\boxed{?}$ trong bảng sau:



Hình 54

Elip	**Hypebol**
Hai tiêu điểm $F_1(-c\,;0)$, $F_2(c\,;0)$.	Hai tiêu điểm $F_1(-c\,;0)$, $F_2(c\,;0)$.
Elip (E) là tập hợp các điểm M sao cho: $MF_1 + MF_2 = 2a$.	Hypebol (H) là tập hợp các điểm M sao cho: $\lvert MF_1 - MF_2 \rvert = 2a$.
Elip (E) có phương trình chính tắc là: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a^2 = c^2 + b^2$.	Hypebol (H) có phương trình chính tắc là: $\dfrac{x^2}{a^2} \boxed{?} \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a^2 = c^2 \boxed{?} b^2$.

Ta chứng minh được rằng:

Khi chọn hệ trục toạ độ như trên, phương trình đường hypebol có thể viết dưới dạng

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ trong đó } a > 0,\ b > 0.$$

Đây gọi là *phương trình chính tắc của hypebol*.

Chú ý

Đối với hypebol (H) có phương trình chính tắc như đã nêu ở trên, ta có:

- $c^2 = a^2 + b^2$, ở đó $2c = F_1F_2$, và điều kiện $a > b$ là không bắt buộc.
- Nếu điểm $M(x\,;y)$ thuộc hypebol (H) thì $x \le -a$ hoặc $x \ge a$.

Ví dụ 3 Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường hypebol?

a) $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = -1$; b) $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$;

c) $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$; d) $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$.

Giải

Phương trình chính tắc của hypebol có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > 0$, $b > 0$ nên các trường hợp b), c), d) là phương trình chính tắc của đường hypebol.

2 Viết phương trình hypebol sau đây dưới dạng chính tắc:

$4x^2 - 9y^2 = 1.$

Ví dụ 4 Viết phương trình chính tắc của đường hypebol (H) có một tiêu điểm là $F_2(6 ; 0)$ và đi qua điểm $A_2(4 ; 0)$.

Giải

Giả sử hypebol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > 0$, $b > 0$.

Do $A_2(4 ; 0)$ thuộc (H) nên $\frac{4^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1$, suy ra $a = 4$. Mà $F_2(6 ; 0)$ là tiêu điểm của (H) nên $c = 6$. Suy ra

$$b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20.$$

Vậy hypebol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$.

III. ĐƯỜNG PARABOL

Cũng như hai đường elip và hypebol, đường parabol là một đường quen thuộc với chúng ta và thường gặp trong thực tế, chẳng hạn:

Để giảm lực tác động lên cây cầu người ta thiết kế cầu có dạng hình parabol quay bề lõm xuống phía dưới.

(*Nguồn: https://commons.wikimedia.org*)

Đài phun nước với các tia nước có dạng hình parabol

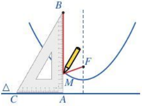
(*Nguồn: https://commons.wikimedia.org*)

1. Định nghĩa đường parabol

5 Lấy đường thẳng Δ và một điểm F không thuộc Δ. Lấy một ê ke ABC (vuông ở A) và một đoạn dây không đàn hồi, có độ dài bằng AB. Đính một đầu dây vào điểm F, đầu kia vào đỉnh B của ê ke. Đặt ê ke sao cho cạnh AC nằm trên Δ, lấy đầu bút chì (kí hiệu là điểm M) ép sát sợi dây vào cạnh AB và giữ căng sợi dây. Lúc này, sợi dây chính là đường gấp khúc BMF.

Cho cạnh AC của ê ke trượt trên Δ (*Hình 55*). Khi đó, đầu bút chì M sẽ vạch nên một đường mà ta gọi là *đường parabol*.

Khi M thay đổi, có nhận xét gì về khoảng cách từ M đến F và khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ?



Hình 55

Khi M thay đổi, ta có: $MA + MB = MF + MB\ (= AB)$.
Do đó $MA = MF$.

Cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F.

Đường parabol (còn gọi là parabol) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng cách đều F và Δ.

Điểm F được gọi là tiêu điểm của parabol. Đường thẳng Δ được gọi là đường chuẩn của parabol.

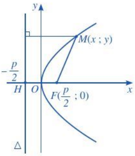
2. Phương trình chính tắc của parabol

6 Cho parabol (P) với tiêu điểm F và đường chuẩn Δ.

Cũng như elip, để lập phương trình của (P), trước tiên ta sẽ chọn hệ trục toạ độ Oxy thuận tiện nhất.

Kẻ FH vuông góc với Δ $(H \in \Delta)$. Đặt $FH = p > 0$. Ta chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho O là trung điểm đoạn thẳng FH và F nằm trên tia Ox (*Hình 56*).

Suy ra: $F\left(\dfrac{p}{2}; 0\right)$, $H\left(-\dfrac{p}{2}; 0\right)$ và phương trình đường thẳng Δ là $x + \dfrac{p}{2} = 0$.



Hình 56

Do đó khoảng cách từ $M(x\,;y) \in (P)$ đến đường thẳng Δ là $\left|x + \frac{p}{2}\right|$.

Ta có: $M(x\,;y) \in (P)$ khi và chỉ khi độ dài MF bằng khoảng cách từ M tới Δ, tức là

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| \Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 = 2px.$$

Khi chọn hệ trục toạ độ như trên, phương trình đường parabol có thể viết dưới dạng

$$y^2 = 2px \ (p > 0).$$

Đây gọi là *phương trình chính tắc của parabol*.

Chú ý: Đối với parabol (P) có phương trình chính tắc $y^2 = 2px$ $(p > 0)$, ta có:

- Tiêu điểm là $F\left(\frac{p}{2}\,;0\right)$ và phương trình đường chuẩn là $x + \frac{p}{2} = 0$.
- Nếu điểm $M(x\,;y)$ thuộc parabol (P) thì $x \geq 0$.

Ví dụ 5 Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường parabol?

a) $y^2 = -6x$; b) $y^2 = 6x$; c) $x^2 = -6y$; d) $x^2 = 6y$.

Giải

Phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2 = 2px$ với $p > 0$ nên chỉ có trường hợp b) là phương trình chính tắc của đường parabol.

Ví dụ 6 Viết phương trình chính tắc của parabol (P) biết:

a) (P) có tiêu điểm là $F(5\,;0)$; b) (P) đi qua điểm $M(2\,;1)$.

Giải

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2 = 2px$ $(p > 0)$.

a) Vì (P) có tiêu điểm là $F(5\,;0)$ nên $\frac{p}{2} = 5$, tức là $p = 10$.

Vậy phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = 20x$.

b) Do điểm $M(2\,;1)$ nằm trên (P) nên $1^2 = 2p\,.\,2$, tức là $p = \frac{1}{4}$. Vậy phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = \frac{x}{2}$.

3 Viết phương trình các parabol sau đây dưới dạng chính tắc:

a) $x = \frac{y^2}{4}$;

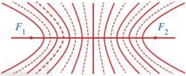
b) $x - y^2 = 0$.

IV. MỘT SỐ ỨNG DỤNG THỰC TIỄN CỦA BA ĐƯỜNG CONIC

Ba đường conic có nhiều ứng dụng trong thực tiễn. Ta nêu ra một vài ứng dụng của ba đường conic.

1. Năm 1911, nhà vật lí học người Anh là Ernest Rutherford (1871 – 1937) đã đề xuất mô hình hành tinh nguyên tử, trong đó hạt nhân nhỏ bé nằm tại tâm của nguyên tử, còn các electron bay quanh hạt nhân trên các quỹ đạo hình elip như các hành tinh bay quanh Mặt Trời (*Hình 57*).

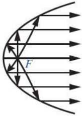
Hình 57



Hình 58

2. Trong vật lí, hiện tượng hai sóng gặp nhau tạo nên các gợn sóng ổn định gọi là hiện tượng giao thoa của hai sóng. Các gợn sóng có hình các đường hypebol gọi là các vân giao thoa (*Hình 58*).

3. Với gương parabol, tia sáng phát ra từ tiêu điểm (tia tới) chiếu đến một điểm của parabol sẽ bị hắt lại (tia phản xạ) theo một tia song song (hoặc trùng) với trục của parabol (*Hình 59*).



Hình 59

Hình 60

Hình 61

Tính chất trên có nhiều ứng dụng, chẳng hạn:

– Đèn pha: Bề mặt của đèn pha là một mặt tròn xoay sinh bởi một cung parabol quay quanh trục của nó, bóng đèn được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol đó (*Hình 60*). Các tia sáng phát ra từ bóng đèn khi chiếu đến bề mặt của đèn pha sẽ bị hắt lại theo các tia sáng song song, cho phép chúng ta quan sát được các vật ở xa.

– Chảo vệ tinh cũng có dạng như đèn pha. Điểm thu và phát tín hiệu của máy được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol (*Hình 61*).

BÀI TẬP

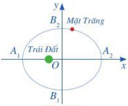
1. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của elip?

a) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{64}=1$; b) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{64}=1$; c) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$; d) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{64}=1$.

2. Cho elip (E) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$. Tìm toạ độ các giao điểm của (E) với trục Ox, Oy và toạ độ các tiêu điểm của (E).

3. Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết toạ độ hai giao điểm của (E) với Ox và Oy lần lượt là $A_1(-5;0)$ và $B_2(0;\sqrt{10})$.

4. Ta biết rằng Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một elip mà Trái Đất là một tiêu điểm. Elip đó có $A_1A_2 = 768\,800$ km và $B_1B_2 = 767\,619$ km (*Nguồn: Ron Larson (2014), Precalculus Real Mathematics, Real People, Cengage*) (*Hình 62*). Viết phương trình chính tắc của elip đó.



Hình 62

5. Những phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của hypebol?

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}=1$; b) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$; c) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{64}=1$; d) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{9}=1$.

6. Tìm toạ độ các đỉnh và tiêu điểm của đường hypebol trong mỗi trường hợp sau:

a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; b) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$.

7. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H), biết $N(\sqrt{10};2)$ nằm trên (H) và hoành độ một giao điểm của (H) với trục Ox bằng 3.

8. Những phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của parabol?

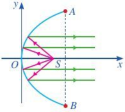
a) $y^2=-2x$; b) $y^2=2x$; c) $x^2=-2y$; d) $y^2=\sqrt{5}x$.

9. Tìm toạ độ tiêu điểm và viết phương trình đường chuẩn của đường parabol trong mỗi trường hợp sau:

a) $y^2=\frac{5x}{2}$; b) $y^2=2\sqrt{2}x$.

10. Viết phương trình chính tắc của đường parabol, biết tiêu điểm là $F(6;0)$.

11. Một chiếc đèn có mặt cắt ngang là hình parabol (*Hình 63*). Hình parabol có chiều rộng giữa hai mép vành là $AB = 40$ cm và chiều sâu $h = 30$ cm (h bằng khoảng cách từ O đến AB). Bóng đèn nằm ở tiêu điểm S. Viết phương trình chính tắc của parabol đó.



Hình 63

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

1. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ (t là tham số) với a, b không đồng thời bằng 0.

a) Chỉ ra một vectơ chỉ phương của d.

b) Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của d.

c) Chỉ ra một điểm có toạ độ khác $(x_0 ; y_0)$ và thuộc đường thẳng d.

2. Cho đường thẳng d: $ax + by + c = 0$ với a, b không đồng thời bằng 0.

a) Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của d.

b) Chỉ ra một vectơ chỉ phương của d.

c) Cho a, b đều khác 0. Chỉ ra một điểm thuộc đường thẳng d mà không nằm trên cả hai trục toạ độ.

3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác MNP có $M(2 ; 1)$, $N(-1 ; 3)$, $P(4 ; 2)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$;

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{MN} . \overrightarrow{MP}$;

c) Tính độ dài các đoạn thẳng MN, MP;

d) Tính $\cos \widehat{NMP}$;

e) Tìm toạ độ trung điểm I của NP và trọng tâm G của tam giác MNP.

4. Lập phương trình tổng quát và phương trình tham số của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

a) d đi qua điểm $A(-3 ; 2)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2 ; -3)$;

b) d đi qua điểm $B(-2 ; -5)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-7 ; 6)$;

c) d đi qua hai điểm $C(4 ; 3)$ và $D(5 ; 2)$.

5. Lập phương trình đường tròn (C) trong mỗi trường hợp sau:

a) (C) có tâm $I(-4 ; 2)$ và bán kính $R = 3$;

b) (C) có tâm $P(3 ; -2)$ và đi qua điểm $E(1 ; 4)$;

c) (C) có tâm $Q(5 ; -1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ: $3x + 4y - 1 = 0$;

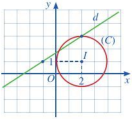
d) (C) đi qua ba điểm $A(-3 ; 2)$, $B(-2 ; -5)$ và $D(5 ; 2)$.

6. Quan sát *Hình 64* và thực hiện các hoạt động sau:

a) Lập phương trình đường thẳng d;

b) Lập phương trình đường tròn (C);

c) Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(2+\sqrt{2}\,;1+\sqrt{2})$.



Hình 64

7. Cho hai đường thẳng

Δ_1: $\sqrt{3}x + y - 4 = 0$, Δ_2: $x + \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0$.

a) Tìm toạ độ giao điểm hai đường thẳng đã cho;

b) Tính góc α giữa hai đường thẳng đã cho.

8. Cho biết mỗi đường conic có phương trình dưới đây là đường conic dạng nào (elip, hypebol, parabol) và tìm toạ độ tiêu điểm của đường conic đó.

a) $y^2 = 18x$; b) $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{25} = 1$; c) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

9. Cho tam giác AF_1F_2, trong đó $A(0\,;4)$, $F_1(-3\,;0)$, $F_2(3\,;0)$.

a) Lập phương trình tổng quát của các đường thẳng AF_1 và AF_2.

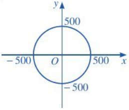
b) Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp của tam giác AF_1F_2.

c) Lập phương trình chính tắc của elip (E) có hai tiêu điểm là F_1, F_2 sao cho (E) đi qua A.

10. Trên màn hình ra-đa của đài kiểm soát không lưu sân bay A có hệ trục toạ độ Oxy (*Hình 65*), trong đó đơn vị trên mỗi trục tính theo ki-lô-mét và đài kiểm soát được coi là gốc toạ độ $O(0\,;0)$. Nếu máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 500 km thì sẽ hiển thị trên màn hình ra-đa.

Một máy bay khởi hành từ sân bay B lúc 14 giờ. Sau thời gian t (giờ), vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M có toạ độ như sau:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1\,600}{3} - \dfrac{1\,400}{3}t \\ y = \dfrac{1\,900}{3} - \dfrac{1\,400}{3}t. \end{cases}$$



Hình 65

a) Tìm vị trí của máy bay lúc 14 giờ 30 phút. Thời điểm này máy bay đã xuất hiện trên màn hình ra-đa chưa?

b) Lúc mấy giờ máy bay bay gần đài kiểm soát không lưu nhất? Tính khoảng cách giữa máy bay và đài kiểm soát không lưu lúc đó.

c) Máy bay ra khỏi màn hình ra-đa vào thời gian nào?

THỰC HÀNH PHẦN MỀM GEOGEBRA
(NẾU NHÀ TRƯỜNG CÓ ĐIỀU KIỆN THỰC HIỆN)

I. GIỚI THIỆU PHẦN MỀM GEOGEBRA

Hiện nay, trên thế giới có nhiều phần mềm toán học, trong đó có phần mềm GeoGebra. GeoGebra là phần mềm miễn phí, dễ sử dụng, thân thiện với người dùng và có các phiên bản cho khoảng 80 ngôn ngữ khác nhau. Sau khi đã cài đặt phần mềm, việc chuyển đổi ngôn ngữ (chẳng hạn từ tiếng Anh sang tiếng Việt) hết sức đơn giản. Phần mềm GeoGebra có phạm vi sử dụng rất rộng (Hình học phẳng, Hình học không gian, Đại số, Giải tích, Xác suất, Thống kê, Bảng tính điện tử) và trên nhiều hệ điều hành khác nhau, có thể chạy trực tuyến (online) hoặc cài đặt vào máy tính, điện thoại thông minh và hỗ trợ rất tốt cho việc dạy học môn Toán cũng như giáo dục STEM.

Để sử dụng phần mềm GeoGebra, chúng ta có thể sử dụng online tại địa chỉ https://www.geogebra.org/ hoặc tải từ địa chỉ https://www.geogebra.org/download và cài đặt vào máy tính hoặc điện thoại thông minh, sau đó cài đặt ngôn ngữ Tiếng Việt để sử dụng.

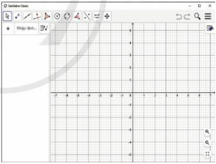
II. THỰC HÀNH PHẦN MỀM GEOGEBRA

1. Biểu diễn miền nghiệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bước 1. Mở trang GeoGebra (*Hình 1*).

Bước 2. Nhập từng bất phương trình vào ô Nhập lệnh: và bấm enter.

Khi đó màn hình sẽ hiển thị miền nghiệm của từng bất phương trình, là miền được tô màu. Miền nghiệm của hệ là miền giao của từng bất phương trình và được biểu diễn bởi miền màu đậm hơn.



Hình 1

Ví dụ 1 Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

$$\begin{cases} 3x - y + 3 > 0 \\ -2x + 3y - 6 \le 0 \\ 2x + y + 4 \ge 0. \end{cases}$$

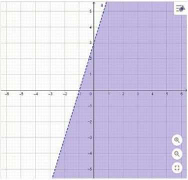
1 Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

$$\begin{cases} x - 2y + 3 \le 0 \\ x + 3y > -2 \\ x \le 0. \end{cases}$$

Hướng dẫn

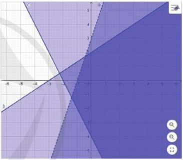
Bước 1. Mở trang GeoGebra.

Bước 2. Nhập bất phương trình $3x - y + 3 > 0$ vào ô Nhập lệnh: và bấm enter, màn hình sẽ hiển thị như *Hình 2*. Miền nghiệm của bất phương trình $3x - y + 3 > 0$ là miền được tô màu. Đường nét đứt biểu thị miền nghiệm không chứa các điểm nằm trên đường thẳng $3x - y + 3 = 0$.



Hình 2

Bước 3. Tiếp tục nhập từng bất phương trình còn lại như sau: $-2x + 3y - 6 \leq 0$ (–2x+3y–6<=0); $2x + y + 4 \geq 0$ (2x+y+4>=0). Khi đó màn hình sẽ hiển thị như *Hình 3*. Miền nghiệm của hệ là miền được tô màu đậm nhất. Các đường nét liền: $-2x + 3y - 6 = 0$; $2x + y + 4 = 0$ biểu thị các điểm nằm trên hai đường thẳng đó cũng thuộc miền nghiệm.



Hình 3

2. Vẽ các đường conic

a) Giới thiệu một số công cụ cơ bản trong phần mềm GeoGebra để vẽ hình

Sau đây là một số công cụ cơ bản trong phần mềm GeoGebra để vẽ hình:

Di chuyển: Ta có thể sử dụng chuột để kéo và thả các đối tượng tự do. Khi ta nhấp chọn một đối tượng trong công cụ Di chuyển, ta có thể xoá đối tượng bằng nút Delete hoặc di chuyển đối tượng bằng các phím mũi tên.

Điểm mới: Nháy chuột lên vùng làm việc để vẽ một điểm mới.

Đường thẳng (biết hai điểm thuộc đường thẳng): Nháy chuột vào biểu tượng, sau đó nháy chuột lên vị trí điểm thứ nhất (ở vùng làm việc) rồi di chuyển con trỏ và nháy chuột lên vị trí điểm thứ hai.

Elip (biết hai tiêu điểm và một điểm thuộc elip đó): Nháy chuột vào biểu tượng, sau đó nháy chuột lên vị trí hai điểm phân biệt ở vùng làm việc để vẽ hai tiêu điểm, rồi di chuyển con trỏ đến vị trí một điểm thuộc elip và nháy chuột.

Hypebol (biết hai tiêu điểm và một điểm thuộc hypebol đó): Cách làm tương tự như đối với elip.

Parabol (biết tiêu điểm và đường chuẩn): Vẽ đường chuẩn. Nháy chuột vào biểu tượng, sau đó nháy chuột lên vị trí một điểm ở vùng làm việc để vẽ tiêu điểm, rồi di chuyển con trỏ đến vị trí đường chuẩn và nháy chuột.

b) Thực hành vẽ ba đường conic

CÁCH 1. Dùng biểu tượng để vẽ elip (hypebol, parabol):

Nháy chuột vào biểu tượng (,) và thực hiện các bước như mô tả ở trên.

CÁCH 2. Dùng lệnh vẽ ba đường conic khi biết tiêu điểm và điểm thuộc đường conic (hoặc đường chuẩn):

– Để vẽ elip (hypebol) có toạ độ hai tiêu điểm (– c ; 0), (c ; 0) và đi qua điểm M(m ; n) ta nhập lệnh:

+ Đối với elip: Elip((–c,0),(c,0),(m,n)) rồi bấm enter.

+ Đối với hypebol: Hypebon((–c,0),(c,0),(m,n)) rồi bấm enter.

– Để vẽ parabol biết toạ độ tiêu điểm (c ; 0) và đường chuẩn x – a = 0, ta nhập lệnh: Parabon((c,0),x – a=0) rồi bấm enter.

Chú ý: Khi nhập lệnh, toạ độ của điểm được ngăn cách bởi dấu “,”.

CÁCH 3. Dùng lệnh vẽ ba đường conic khi biết phương trình chính tắc:

– Trong trường hợp các số a, b, p có giá trị cụ thể:

+ Đối với elip: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, ta nhập phương trình vào ô Nhập lệnh: như sau:

x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1 (hoặc sử dụng bàn phím ảo có công thức toán để nhập) rồi bấm enter.

+ Đối với hypebol: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, ta nhập phương trình vào ô Nhập lệnh: như sau:

x^2 / a^2 – y^2 / b^2 = 1 (hoặc sử dụng bàn phím ảo có công thức toán để nhập) rồi bấm enter.

+ Đối với parabol: $y^2 = 2px$, ta nhập phương trình vào ô Nhập lệnh: như sau:

y^2=2*p*x (hoặc sử dụng bàn phím ảo có công thức toán để nhập) rồi bấm enter.

– Trong trường hợp các số a, b, p là các tham số có thể thay đổi giá trị:

+ Tạo thanh trượt a: Nháy vào $a=2$, sau đó nháy chuột lên vùng làm việc, khi đó trên vùng làm việc xuất hiện bảng cho phép thiết lập thông tin cho thanh trượt: tên thanh trượt (a), giá trị dạng số, giá trị cực tiểu, giá trị cực đại.

+ Tạo thanh trượt b và p: Làm tương tự như trên.

+ Nhập phương trình chính tắc của các đường conic vào ô Nhập lệnh: (giữ nguyên các tham số), sau đó bấm enter.

+ Dịch chuyển trên thanh trượt để thay đổi giá trị a, b, p ta được các hình đường conic tương ứng.

Ví dụ 2 Vẽ hình trong mỗi trường hợp:

a) Vẽ elip biết hai tiêu điểm $F_1(-3 ; 0)$, $F_2(3 ; 0)$ và điểm có toạ độ $(0 ; 4)$ thuộc elip;

b) Vẽ hypebol biết phương trình chính tắc $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$;

c) Vẽ parabol tại các giá trị $p = 2$, $p = 3$.

Hướng dẫn

a) Nhập lệnh: Elip((–3,0),(3,0),(0,4)) vào ô nhập lệnh rồi bấm enter.

b) Nhập phương trình $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ vào ô nhập lệnh: x^2 / 16 – y^2 / 25 = 1 (hoặc sử dụng bàn phím ảo có công thức toán để nhập) và bấm enter.

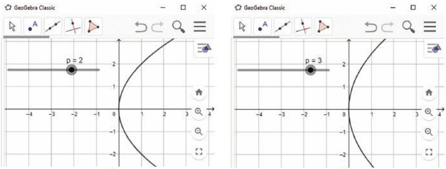
c) Tạo thanh trượt p, sau đó nhập phương trình parabol: y^2=2px. Dịch chuyển thanh trượt p vào các giá trị 2; 3 để nhận hình đường parabol tương ứng ở *Hình 4a* và *Hình 4b*.

2 Vẽ hình trong mỗi trường hợp:

a) Vẽ hypebol biết hai tiêu điểm $F_1(-5 ; 0)$, $F_2(5 ; 0)$ và điểm $(3 ; 0)$ thuộc hypebol;

b) Vẽ parabol biết phương trình chính tắc: $y^2 = 5x$;

c) Vẽ elip tại các giá trị $a = 3$, $b = 1$ và $a = 6$, $b = 3{,}5$.



a) *b)*

Hình 4

3. Vẽ biểu đồ và tính các số đặc trưng đo xu thế trung tâm, đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu không ghép nhóm

a) Giới thiệu công cụ cơ bản

Hiển thị Spreadsheet: Tạo bảng để nhập dữ liệu (Nháy chuột vào biểu tượng rồi chọn ⋮ để xuất hiện công cụ cần dùng).

: Phân tích thống kê.

b) Thực hành

Ví dụ 3 Nhiệt độ (đơn vị: °C) ở Thành phố Hồ Chí Minh ngày 03/6/2021 sau tám lần đo là:

27 26 28 32 34 35 30 28

Vẽ biểu đồ cột mô tả tần số và tìm số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị, phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.

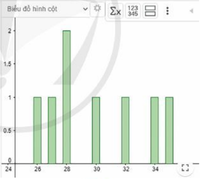
Bước 1. Nháy chuột vào Hiển thị Spreadsheet để hiển thị bảng.

Bước 2. Nhập dữ liệu vào cột A của bảng như *Hình 5*.

	A	B
1	27	
2	26	
3	28	
4	32	
5	34	
6	35	
7	30	
8	28	

Hình 5

Bước 3. Chọn bảng dữ liệu: Nháy chuột chọn cột A. Chọn , rồi nhấn vào Phân tích 1 biến. Khi đó màn hình xuất hiện biểu đồ như *Hình 6*.



Hình 6

Bước 4. Nháy chuột vào Σx ta nhận được bảng như *Hình 7*.

n	8
Trung bình	30
σ	3.1225
s	3.3381
Σx	240
Σx²	7278
GTNN	26
Q1	27.5
Trung vị	29
Q3	33
GTLN	35

Hình 7

Từ đó ta đọc được các kết quả:

Số trung bình cộng (Trung bình) là 30.

Độ lệch chuẩn (σ) là 3,1225.

Tứ phân vị là: $Q_1 = 27{,}5$; $Q_2 = 29$; $Q_3 = 33$.

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ	GIẢI THÍCH	TRANG
biến cố	một tập con của không gian mẫu	47
chỉnh hợp chập k của n phần tử ($k \in \mathbb{N}, 0 < k \leq n$)	mỗi kết quả của việc lấy k phần tử từ n phần tử của một tập hợp và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó	12
hoán vị của n phần tử	mỗi kết quả của sự sắp xếp n phần tử của một tập hợp	11
không gian mẫu của phép thử	tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó	46
công thức nhị thức Newton	công thức khai triển tổng quát của biểu thức $(a+b)^n$	18
phép thử ngẫu nhiên	một thí nghiệm mà ta không đoán trước được kết quả nhưng xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể có của thí nghiệm đó	46
phương trình đường tròn	phương trình có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2\ (R > 0)$	88
phương trình chính tắc của elip	phương trình có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$	94
phương trình chính tắc của hypebol	phương trình có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > 0, b > 0)$	97
phương trình chính tắc của parabol	phương trình có dạng $y^2 = 2px\ (p > 0)$	100
phương trình tổng quát của đường thẳng	phương trình có dạng $ax + by + c = 0\ (a^2 + b^2 \neq 0)$	76
sai số tuyệt đối của số gần đúng	giá trị tuyệt đối của hiệu giữa số đúng $\overline{a}$ và số gần đúng a: $\Delta_a = \lvert\overline{a} - a\rvert$	22
sai số tương đối của số gần đúng	tỉ số giữa sai số tuyệt đối và giá trị tuyệt đối của số gần đúng a: $\delta_a = \frac{\Delta a}{\lvert a\rvert}$	24
sơ đồ hình cây	sơ đồ bắt đầu tại một nút duy nhất với các nhánh toả ra các nút bổ sung	6
toạ độ của vectơ $\vec{u}$	toạ độ của điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ với O là gốc toạ độ	62
tổ hợp chập k của n phần tử ($k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$)	mỗi tập con gồm k phần tử lấy từ n phần tử của một tập hợp	15

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
Địa chỉ: Tầng 6, Toà nhà số 128 đường Xuân Thuỷ, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội
Điện thoại: 024.37547735
Email: nxb@hnue.edu.vn | **Website:** www.nxbdhsp.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc: NGUYỄN BÁ CƯỜNG
Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập: ĐỖ VIỆT HÙNG

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM
Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGƯT NGÔ TRẦN ÁI
Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập:
TẠ THỊ ÁNH – NGUYỄN THỊ NGÂN – ĐÀO ANH TIẾN
Thiết kế sách:
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG YÊN
Trình bày bìa:
PHAN THỊ LƯƠNG
Sửa bản in:
LÊ TRUNG DŨNG – VŨ MẠNH HUY

TOÁN 10 - TẬP HAI

Mã số:
ISBN: ....
In .... cuốn, khổ 19 x 26,5cm, tại ......
Địa chỉ: ....
Số xác nhận đăng kí xuất bản: ...-.../... /...-.../...
Quyết định xuất bản số: .... /....-... ngày ... /... /....
In xong và nộp lưu chiểu

Mang cuộc sống vào bài học
Đưa bài học vào cuộc sống

Toán 10 là cuốn sách giáo khoa dành cho học sinh lớp 10, thuộc bộ sách giáo khoa "Cánh Diều", thực hiện theo "Chương trình Giáo dục phổ thông 2018".

Sách gồm hai tập và chuyên đề học tập được biên soạn đáp ứng yêu cầu phát triển phẩm chất và năng lực của học sinh. Các hoạt động học tập được tổ chức theo tiến trình từ dễ đến khó, hướng đến việc khám phá, phát hiện, thực hành, vận dụng giải quyết vấn đề trong thực tiễn, phù hợp với trình độ nhận thức của học sinh. Sách được trình bày hấp dẫn, khơi gợi sự tò mò, kích thích hứng thú, tạo dựng niềm tin trong học tập môn Toán ở học sinh.

Sách là sản phẩm tâm huyết của tập thể tác giả – những nhà giáo, nhà khoa học giàu kinh nghiệm trong giáo dục phổ thông.